

Interrogation n° 13

Exercice 1 *Question de cours*

1. Citer 5 espaces vectoriels de référence.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E . Soit $x \in E$, donner la définition de x est combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_p)$.
3. Soit E un espace vectoriel, donner la caractérisation de F sous-espace vectoriel de E .
4. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E , compléter :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \{ \dots \}$$

5. Donner la définition d'une famille libre.
6. Donner la définition d'une famille génératrice.

Exercice 2

1. Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3z = 0 \text{ et } -y + 5z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de F .
3. En déduire une base de F .

Corrigé : Interrogation n° 13

Exercice 1 Question de cours

1. Citer 5 espaces vectoriels de référence.

On peut, par exemple, citer : pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F(I, \mathbb{R})$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E . Soit $x \in E$, donner la définition de x est combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_p)$.

x est combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_p)$ si il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$.

3. Soit E un espace vectoriel, donner la caractérisation de F sous-espace vectoriel de E .

Il faut que $F \subset E$, $F \neq \emptyset$ et que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x, y) \in F^2$, $\lambda x + y \in F$.

4. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E , compléter :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \{ \dots \}$$

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$$

5. Donner la définition d'une famille libre.

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre si $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$:

$$\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0 \right) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0)$$

6. Donner la définition d'une famille génératrice.

Soit E un espace vectoriel, la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de E si pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$.

Exercice 2

1. Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3z = 0 \text{ et } -y + 5z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- On a clairement $F \subset \mathbb{R}^3$.
- $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ en effet $2 \times 0 - 3 \times 0 = 0$ et $-0 + 5 \times 0 = 0$ donc $F \neq \emptyset$.
- Soit $X_1 = (x_1, y_1, z_1) \in F$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda X_1 + X_2 \in F$. On remarque que :

$$\lambda X_1 + X_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$$

et donc $2(\lambda x_1 + x_2) - 3(\lambda z_1 + z_2) = \lambda(2x_1 - 3z_1) + (2x_2 - 3z_2) = \lambda \times 0 + 0 = 0$ car $X_1 \in F$ et $X_2 \in F$.

De même, $-(\lambda y_1 + y_2) + 5(\lambda z_1 + z_2) = \lambda(-y_1 + 5z_1) + (-y_2 + 5z_2) = \lambda \times 0 + 0 = 0$ car $X_1 \in F$ et $X_2 \in F$.

Donc $\lambda X_1 + X_2 \in F$.

On peut donc conclure que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer une famille génératrice de F .

On a :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{3}{2}z \text{ et } y = 5z\} = \left\{ \left(\frac{3}{2}z, 5z, z \right) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \left(\frac{3}{2}, 5, 1 \right) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Ainsi $F = \text{Vect} \left(\left(\frac{3}{2}, 5, 1 \right) \right)$. La famille $\left(\left(\frac{3}{2}, 5, 1 \right) \right)$ est donc génératrice de F .

3. En déduire une base de F .

La famille $\left(\left(\frac{3}{2}, 5, 1 \right) \right)$ est donc génératrice de F et libre car constituée d'un unique vecteur non nul. C'est donc une base de F .