Corrigé : Interrogation n° 13

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.
2. Soit $q \in \mathbb{R}$. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ et de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k$.
3. Donner l'expression (avec les factorielles) de $\binom{n}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
4. Enoncer la formule du binôme de Newton.
5. Soit $a \in \mathbb{R}_+$, compléter les équivalences suivantes :

$$|x| = a \iff \dots\dots\dots, \quad |x| < a \iff \dots\dots\dots, \quad |x| > a \iff \dots\dots\dots$$

6. Compléter le tableau suivant

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$					
$\sin x$					

7. (a) Sur quel domaine est défini la fonction tangente ?
   (b) Quelle est l'expression de sa dérivée ?
   (c) Sur quel domaine est défini la fonction arctangente ?
   (d) Quelle est l'expression de sa dérivée ?
8. Donner la définition de deux suites adjacentes.
9. Enoncer le théorème des suites adjacentes.
10. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$, énoncer la formule de Taylor en un point $a \in \mathbb{R}$.
    (b) Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$. Ecrire la formule de Taylor pour $a = 2$.

> On a : $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k$, calculons les dérivées de P, on a :
>
> $$P^{(0)}(x) = P(x) \quad \text{donc} \quad P(2) = 8 - 2 \times 4 - 2 + 1 = -1$$
> $$P^{(1)}(x) = P'(x) = 3x^2 - 4x - 1 \quad \text{donc} \quad P'(2) = 3 \times 4 - 4 \times 2 - 1 = 3$$
> $$P^{(2)}(x) = 6x - 4 \quad \text{donc} \quad P^{(2)}(2) = 8$$
> $$P^{(3)}(x) = 6 \quad \text{donc} \quad P^{(3)}(2) = 6$$
>
> Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
>
> $$P(x) = -1 + 3(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 = -1 + 3(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

11. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, on considère l'équation $f(x) = k$.
    (a) Citer le théorème et ses hypothèses permettant d'assurer l'existence de solutions à cette équation.
    (b) Avec quelle hypothèse supplémentaire a-t-on l'unicité de la solution ?
12. Citer le théorème de la bijection.
13. Enoncer la formule des probabilités composées pour 4 événements : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \dots$.
14. Citer 5 espaces vectoriels de référence.
15. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Soit $x \in E$, donner la définition de x est combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_p)$.
16. Soit E un espace vectoriel, donner la caractérisation de F sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2

1. Simplifier les expressions suivantes $\quad A = \dfrac{e^{x^2+1}\left(e^{x+\ln(2x)}\right)^2}{e^{(x+1)^2}}$ et $\quad B = \ln(x-1) + \ln(e\,x + e) - \ln(x^2-1)$.

$$A = \frac{e^{x^2+1}e^{2x+2\ln(2x)}}{e^{x^2+2x+1}} = e^{x^2+1+2x+2\ln(2x)-(x^2+2x+1)} = e^{2\ln(2x)} = \left(e^{\ln(2x)}\right)^2 = (2x)^2 = 4x^2.$$

$$\begin{aligned} B &= \ln(x-1) + \ln(e(x+1)) - \ln(x^2-1) = \ln(x-1) + \ln(x+1) + \ln(e) - \ln(x^2-1) \\ &= \ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-1}\right) + \ln(e) = \ln(1) + 1 = 1. \end{aligned}$$

2. Résoudre sur $]1; +\infty[$, l'équation suivante $\quad \ln(3x-1) + \ln(x+4) = \ln(x-1)$.

L'équation peut se réécrire sous la forme :

$$\ln((3x-1)(x+4)) = \ln(x-1).$$

L'équation équivaut alors à :

$$(3x-1)(x+4) = x - 1 \iff 3x^2 + 12x - x - 4 - x + 1 = 0 \iff 3x^2 + 10x - 3 = 0.$$

On a alors $\Delta = (10)^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 100 + 36 = 136$. Ainsi $x_1 = \dfrac{-10+\sqrt{136}}{2\times 3} = \dfrac{-10+2\sqrt{34}}{6} = \dfrac{-5+\sqrt{34}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{34}}{3}$. On remarque que $x_1 < 1$ et $x_2 < 0$, or l'équation n'est définie que sur $]1; +\infty[$. Ainsi :

$$\mathscr{S} = \emptyset.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante $\quad e^{4x}e \geqslant e^x$.

$$e^{4x}e \geqslant e^x \iff e^{4x}e^1 \geqslant e^x \iff e^{4x+1} \geqslant e^x.$$

L'inéquation équivaut alors à $4x + 1 \geqslant x$, soit $3x + 1 \geqslant 0$. Ainsi $x \geqslant \dfrac{-1}{3}$. On a alors

$$\mathscr{S} = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[.$$

Exercice 3

Soit P le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$. Factoriser le polynôme de P.

On a $P(-2) = 0$ et $P'(-2) \neq 0$ donc -2 est racine simple de P. Il existe alors $Q \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que $P(x) = (x+2)Q(x)$. On effectue la division euclidienne de P par $x+2$ et on obtient

$$Q(x) = x^3 - x^2 - x - 2.$$

On a $Q(2) = 0$ et $Q'(2) \neq 0$ donc il existe $R \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $Q(x) = (x-2)R(x)$. On effectue la division euclidienne de Q par $x-2$ et on obtient

$$R(x) = x^2 + x + 1.$$

Factorisons le polynôme R, calculons Δ, on a : $\Delta = -3 < 0$ donc R est irréductible dans $\mathbb{R}$. On obtient alors la factorisation suivante pour P :

$$P(x) = (x+2)(x-2)(x^2+x+1).$$

Exercice 4

On définit l'application : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{6}{5} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{8}{5} \right\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{8x-3}{-5x+6} \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{8}{5}\}$, montrons que l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{6}{5}\}$ et déterminons la. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{8}{5}\}$, on a :

$$f(x) = y \iff \frac{8x-3}{-5x+6} = y \iff 8x - 3 = y(-5x+6) \iff x(8+5y) = 6y+3.$$

Or $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{8}{5}\}$ donc $8 + 5y \neq 0$, ainsi $x = \dfrac{6y+3}{8+5y}$. Il reste à vérifier que $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{6}{5}\}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $x = \dfrac{6}{5}$. On a alors :

$$x = \frac{6}{5} \iff \frac{6y+3}{8+5y} = \frac{6}{5} \iff 5(3+6y) = 6(8+5y) \iff 15 = 48 \quad \text{Absurde.}$$

Ainsi $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{6}{5}\}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{8}{5}\}$ admet bien un unique antécédent.

On en conclut que f est bijective sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{6}{5}\}$ et sa bijection réciproque f^{-1} est définie de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{8}{5}\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{6}{5}\}$ par

$$f^{-1}(x) = \frac{6x+3}{8+5x}.$$

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $\quad f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 4}{x - 3}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

   Les fonctions $x \mapsto 2x^2 - 5x - 4$ et $x \mapsto x - 3$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x - 3$ s'annule en $x = 3$ ainsi la fonction f est définie sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{3\}}$.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$. Que peut-on en déduire concernant la courbe de f ?

> On a $\lim\limits_{x\to 3^+} 2x^2-5x-4=-1$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} x-3=0^+$ donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty}$.
> On a $\lim\limits_{x\to 3^-} 2x^2-5x-4=-1$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} x-3=0^-$ donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty}$.
> On en déduit que la courbe de f admet une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x=3}$.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

> On a pour $x\neq 0$,
> $$f(x)=\frac{x^2\left(2-\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}=x\times\frac{2-\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}$$
> On a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-5}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-4}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x}=0$ donc
> $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=2$$
> Par produit, on conclut que :
> $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

4. (a) Montrer que pour tout $x\neq 3$, $\quad f(x)=2x+1-\dfrac{1}{x-3}$.

> On a pour $x\neq 3$,
> $$2x+1-\frac{1}{x-3}=\frac{(2x+1)(x-3)-1}{x-3}=\frac{2x^2-6x+x-3-1}{x-3}=\frac{2x^2-5x-4}{x-3}=f(x).$$

(b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(2x+1))$. Que peut-on en déduire concernant la courbe de f ?

> On a : $f(x)-(2x+1)=-\dfrac{1}{x-3}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.
> On en conclut que la courbe de f admet une $\boxed{\text{asymptote oblique aux voisinages de } +\infty \text{ et } -\infty}$.

Exercice 6

Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose $e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $u=\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est-il combinaison linéaire de la famille (e_1,e_2,e_3) ?

> Appliquons notre méthode systématique.
> On cherche (si il existe) un triplet $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que
> $$u=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3.$$
> On écrit alors cette relation sous la forme d'un système à trois équations et trois inconnues (λ_1, λ_2, λ_3) et on le

résout par pivot de Gauss. On a :

$$(\mathcal{S})\quad u=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 4\\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S})\quad\iff\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 4\\ & & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 4\\ & - & 3\lambda_2 & & & = & -6 \end{array}\right. \qquad L_2\leftarrow L_2+L_1;\quad L_3\leftarrow L_3-L_1$$

$$(\mathcal{S})\quad\iff\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 4\\ & & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 4\\ & & \lambda_2 & & & = & 2 \end{array}\right.$$

On est alors en présence d'un système échelonné et on obtient :

$$\lambda_2=2,\quad \lambda_3=4-3\times 22=-1,\quad \lambda_1=4-2\times 2+1=1.$$

Ainsi le vecteur u est combinaison linéaire de (e_1,e_2,e_3) et on a :

$$u=e_1+2e_2-e_3.$$

2. Le vecteur $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est-il combinaison linéaire de la famille (e_1,e_2) ?

Appliquons notre méthode systématique.
On cherche (si il existe) un couple $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$v=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2.$$

On écrit alors cette relation sous la forme d'un système à trois équations et deux inconnues $(\lambda_1,\,\lambda_2)$ et on le résout par pivot de Gauss. On a :

$$(\mathcal{S})\quad u=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2 \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & 1\\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 2\\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 3 \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S})\quad\iff\quad \left\{\begin{array}{rcrcr} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & 1\\ & & 3\lambda_2 & = & 3\\ & - & 3\lambda_2 & = & 2 \end{array}\right. \qquad L_2\leftarrow L_2+L_1;\quad L_3\leftarrow L_3-L_1$$

On a alors $\lambda_2=-\dfrac{2}{3}$ et $\lambda_2=1$. Impossible. Le vecteur v n'est pas combinaison linéaire de (e_1,e_2).

Exercice 7

Montrer que $F=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})\quad\middle|\quad 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

On applique le Corollaire 18.1 pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

- On a clairement $F\subset\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
- $2\times 0-0+3\times 0-2\times 0=0$ donc $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\in F$. Ainsi $F\neq\emptyset$.

- Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in F$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda X + Y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \\ \lambda x_4 + y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

Calculons $2z_1 - z_2 + 3z_3 - 2z_4$, on a :

$$\begin{aligned} 2z_1 - z_2 + 3z_3 - 2z_4 &= 2(\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) + 3(\lambda x_3 + y_3) - 2(\lambda x_4 + y_4) \\ &= \lambda(2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4) + (2y_1 - y_2 + 3y_3 - 3y_4) \\ &= \lambda \times 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda X + Y \in F$.

Nous venons donc de démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 8

Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2-k)^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{5^{2k}}{7^{k+1}}$

Pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2-k)^2$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (2-k)^2 &= \sum_{k=0}^{n} (4 - 4k + k^2) \\ &= \sum_{k=0}^{n} 4 - 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k^2 \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= 4(n+1) - 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= (n+1)\left(4 - 2n + \frac{n(2n+1)}{6}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{24 - 12n + 2n^2 + n}{6}\right) \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 - 11n + 24)}{6} \end{aligned}$$

Pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{5^{2k}}{7^{k+1}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{5^{2k}}{7^{k+1}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{25^k}{7 \times 7^k} \\
&= \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{25}{7}\right)^k \\
&= \frac{1}{7} \times \frac{25}{7} \times \frac{1 - \left(\frac{25}{7}\right)^n}{1 - \frac{25}{7}} \\
&= \frac{25}{49} \times \frac{1 - \left(\frac{25}{7}\right)^n}{-\frac{18}{7}} \\
&= -\frac{25}{18 \times 7} \left(1 - \left(\frac{25}{7}\right)^n\right) \\
&= -\frac{25}{126} \left(1 - \left(\frac{25}{7}\right)^n\right)
\end{aligned}$$