Corrigé : Interrogation n° 13

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$.
2. Soit $q \in \mathbb{R}$. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} q^k$ et $\sum_{k=1}^{n} q^k$.
3. Enoncer la formule du binôme de Newton.
4. Ecrire avec des quantificateurs, la suite $(u_n)_n$ est bornée.
5. Donner le domaine de définition, les limites aux bornes du domaine de définition, les variations et tracer le graphe de la fonction logarithme népérien.
6. Donner le domaine de définition, les limites aux bornes du domaine de définition, les variations et tracer le graphe de la fonction exponentielle.
7. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse ?
8. Enoncer le théorème de convergence monotone (pour les suites).
9. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, on considère l'équation $f(x) = k$.
   (a) Citer le théorème et ses hypothèses permettant d'assurer l'existence de solutions à cette équation.
   (b) Avec quelle hypothèse supplémentaire a-t-on l'unicité de la solution ?
10. Citer le théorème de la bijection.
11. Enoncer la formule de Poincaré qui permet d'exprimer $P(A \cup B)$.
12. Enoncer la formule des probabilités composées pour 4 événements : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \ldots$.
13. Sous quelles conditions les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un système complet d'événements ?
14. Citer 5 espaces vectoriels de référence.
15. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Soit $x \in E$, donner la définition de x est combinaison linéaire de la famille $(e_1, \ldots, e_p)$.
16. Soit E un espace vectoriel, donner la caractérisation de F sous-espace vectoriel de E.
17. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, recopier et compléter : $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Exercice 2

Résoudre le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \end{array} \right.$$

On commence par échelonner le système $(\mathcal{S})$ à l'aide du pivot de Gauss :

$$(\mathcal{S}) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L1,\, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & z & = & 1 \\ & - & y & - & z & = & 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & z & = & 1 \end{array} \right.$$

On a alors un système échelonné avec deux inconnues principales et une inconnue secondaire.

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x = 1-z \\ y = -1-z \end{cases}$$

On a alors $\mathscr{S} = \{(1-z, -1-z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3

Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3z = 0 \text{ et } -y + 5z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- On a clairement $F \subset \mathbb{R}^3$.
- $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ en effet $2 \times 0 - 3 \times 0 = 0$ et $-0 + 5 \times 0 = 0$ donc $F \neq \emptyset$.
- Soit $X_1 = (x_1, y_1, z_1) \in F$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda X_1 + X_2 \in F$. On remarque que :

$$\lambda X_1 + X_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$$

et donc $2(\lambda x_1 + x_2) - 3(\lambda z_1 + z_2) = \lambda(2x_1 - 3z_1) + (2x_2 - 3z_2) = \lambda \times 0 + 0 = 0$ car $X_1 \in F$ et $X_2 \in F$.
De même, $-(\lambda y_1 + y_2) + 5(\lambda z_1 + z_2) = \lambda(-y_1 + 5z_1) + (-y_2 + 5z_2) = \lambda \times 0 + 0 = 0$ car $X_1 \in F$ et $X_2 \in F$.
Donc $\lambda X_1 + X_2 \in F$.

On peut donc conclure que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = 1 \quad u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 4u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}. \end{cases}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de u_n en fonction de n.

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout l'équation caractéristique associée :

$$4r^2 - 4r + 1 = 0$$

Cette équation se met sous la forme :

$$(2r-1)^2 = 0.$$

Ainsi elle possède une unique solution $r_0 = \frac{1}{2}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u_n = (\lambda + n\mu)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Utilisons les valeurs de u_0 et u_1 pour déterminer λ et μ. On a : $u_0 = \lambda = 1$ et $u_1 = (\lambda + \mu) \times \frac{1}{2} = 2$. Ainsi

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mu = 3.$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = (1+3n)\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Exercice 5

Factoriser au maximum le polynôme $P(x) = x^3 - 11x^2 + 31x - 21$.

On commence par chercher une racine évidente de $P(x) = x^3 - 11x^2 + 31x - 21$. On a :

$$P(1) = 1^3 - 11 \times 1^2 + 31 \times 1 - 21 = 1 - 11 + 31 - 21 = 0$$

Donc, 1 est racine de P. Il existe donc un polynôme Q tel que $P(x) = (x-1)Q(x)$. On présente les deux méthodes pour déterminer Q :

Méthode 1 : Identification des coefficients

Il existe un polynôme Q de degré $3-1=2$ tel que pour tout réel x :

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & (x-1)Q(x) \\ & = & (x-1)(ax^2+bx+c) \\ & = & ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c \\ & = & ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c \end{array}$$

Les polynômes $x^3-11x^2+31x-21$ et $ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$ sont égaux, leurs coefficients le sont aussi :

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ b-a & = & -11 \\ c-b & = & 31 \\ -c & = & -21 \end{cases} \quad \text{donc :} \quad \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & -10 \\ c & = & 21 \end{cases}$$

Conclusion : $P(x)=(x-1)(x^2-10x+21)$.

Méthode 2 : Division euclidienne

$$\begin{array}{ccccccc|c} x^3 & - & 11x^2 & + & 31x & - & 21 & x-1 \\ \cline{8-8} x^3 & - & x^2 & & & & & x^2-10x+21 \\ \cline{1-7} & - & 10x^2 & + & 31x & - & 21 & \\ & - & 10x^2 & + & 10x & & & \\ \cline{3-7} & & & & 21x & - & 21 & \\ & & & & 21x & - & 21 & \\ \cline{5-7} & & & & & & 0 & \end{array}$$

Conclusion : $P(x)=(x-1)(x^2-10x+21)$

Il nous reste maintenant à factoriser $Q(x)=x^2-10x+21$. Pour cela, il nous faut trouver ses racines. On calcule donc son discriminant : $\Delta=(-10)^2-4\times1\times21=100-84=16>0$. Il y a donc deux racines, qui sont :

$$x_1=\frac{10-4}{2}=3 \qquad x_2=\frac{10+4}{2}=7$$

Ainsi, $Q(x)=(x-3)(x-7)$ et donc

$$\boxed{P(x)=(x-1)(x-3)(x-7)}$$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{2n}}{5^{n+2}}$

Remarquons que $\dfrac{2^{2n}}{5^{n+2}}=\dfrac{(2^2)^n}{5^2\times5^n}=\dfrac{1}{25}\times\dfrac{4^n}{5^n}=\dfrac{1}{25}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

Comme $\frac{4}{5}\in]-1,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n=0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{2n}}{5^{n+2}}=0}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=0}^{n}k^2$

On sait que $\sum\limits_{k=0}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, alors :

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{n^3(1\times(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}))}{6n^3}=\frac{1\times(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et donc par sommes et produits : $\lim_{n\to+\infty} 1 \times (1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) = 2$. Ainsi par quotient, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$.

3. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - \mathrm{e}^x$

On est face à une forme indéterminée, factorisons par le terme prépondérant. On a :

$$\ln(x) - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(-1 + \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}).$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissance comparée et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc par somme et produit, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - \mathrm{e}^x = -\infty}$.

4. $\lim_{x\to1^+} \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$

On a : $\lim_{x\to1^+} x-1 = 0^+$ et $\lim_{x\to1^+} x^2+1 = 2$ ainsi par quotient $\lim_{x\to1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty$. Or $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc par composée de limites $\boxed{\lim_{x\to1^+} \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}} = +\infty}$.

5. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \frac{1}{x} + 1}{x^2+1}$

On a : $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - \frac{1}{x} + 1 = 1$. De plus, $\lim_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$. Ainsi par quotient, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \frac{1}{x} + 1}{x^2+1} = 0}$.

Exercice 7

1. Résoudre l'équation suivante

$$\frac{3x}{3x+2} + \frac{2}{6x+4} + \frac{1}{x} = 1.$$

On commence par déterminer le domaine de définition de l'équation. Les valeurs interdites vérifient $3x+2=0$, $6x+4=0$ et $x=0$. Ainsi les valeurs interdites sont $-\frac{2}{3}$ et 0. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{2}{3}\}$, résolvons donc l'équation. On a

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{3x+2} + \frac{1}{3x+2} + \frac{1}{x} - 1 &= 0 \\
\frac{3x \times x}{x(3x+2)} + \frac{x}{x(3x+2)} + \frac{3x+2}{x(3x+2)} - \frac{x(3x+2)}{x(3x+2)} &= 0 \\
\frac{3x^2 + x + 3x + 2 - 3x^2 - 2x}{x(3x+2)} &= 0 \\
\frac{2x+2}{x(3x+2)} &= 0
\end{aligned}$$

Un quotient est nul ssi son numérateur est nul ainsi $2x+2=0$ et donc $x=-1$. On vérifie que $-1 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{2}{3}\}$. Ainsi $\mathscr{S} = \{-1\}$.

2. Résoudre l'inéquation : $\dfrac{3x^2-x-2}{7x-21} \geq 0$

On commence par remarquer que $\frac{21}{7}=3$ est valeur interdite.
On étudie le signe du numérateur et du dénominateur :

$$7x-21>0 \iff 7x>21 \iff x>3.$$

Pour le numérateur, on calcule le discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4\times 3 \times (-2) = 1+24 = 25 = 5^2$, on a $x_1 = \frac{-(-1)-5}{2\times 3} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{1+5}{6} = 1$. On peut alors dresser le tableau de signes du quotient :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		3		$+\infty$
$7x-21$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2-x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{3x^2-x-2}{7x-21}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

On en déduit la solution de notre inéquation $\mathscr{S} = [-\frac{2}{3}, 1] \cup]3, +\infty[$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x^2-13x+7}{4x-2}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

Les fonctions $x \mapsto 2x^2-13x+7$ et $x \mapsto 4x-2$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto 4x-2$ s'annule en $x=\frac{1}{2}$, ainsi f est définie sur $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}}$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)$ Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

On a d'une part : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2-13x+7) = 1$ et d'autre part : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} 4x-2 = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} 4x-2 = 0^-$. Ainsi par quotient :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$$

Ainsi la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x=\frac{1}{2}$.

3. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

On est face à une forme indéterminée, factorisons par le terme prépondérant :

$$f(x) = \frac{x^2(1 - \frac{13}{x} + \frac{7}{x^2})}{x(4 - \frac{2}{x})} = x \times \frac{1 - \frac{13}{x} + \frac{7}{x^2}}{4 - \frac{2}{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{13}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x} = 0$. Ainsi par somme et quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - \frac{13}{x} + \frac{7}{x^2}}{4 - \frac{2}{x}} = \dfrac{1}{4}$. On conclut que par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

(b) Déterminer les réels a, b et c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{4x-2}.$$

Calculons d'une part :

$$ax + b + \frac{c}{4x-2} = \frac{(ax+b)(4x-2)+c}{4x-2} = \frac{4ax^2 - 2ax + 4bx - 2b + c}{4x-2} = \frac{4ax^2 + (4b-2a)x + c - 2b}{4x-2}$$

On identifie alors avec l'expression de $f(x)$, on obtient :

$$4a = 2, \quad 4b - 2a = -13, \quad c - 2b = 7$$

Ainsi :

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -3, \quad c = 1$$

En conclusion,

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 3 + \frac{1}{4x-2}.$$

(c) En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique dont on déterminera l'équation.

On a alors $f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x - 3\right) = \dfrac{1}{4x-2}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{4x-2} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 0$$

On en conclut que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x - 3$ au voisinage de $+\infty$.
De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{4x-2} = 0$ donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 0$$

On en conclut que $\mathcal{C}_f$ admet également une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x - 3$ au voisinage de $-\infty$.

