

Corrigé : Interrogation n° 12

Exercice 1 Questions de cours

- Donner la valeur de $\sum_{k=0}^n k$.
- Soit $q \in \mathbb{R}$. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^n q^k$ et $\sum_{k=1}^n q^k$.
- Enoncer la formule du binôme de Newton.
- Ecrire avec des quantificateurs, la suite $(u_n)_n$ est bornée.
- Donner le domaine de définition, les limites aux bornes du domaine de définition, les variations et tracer le graphe de la fonction logarithme népérien.
- Donner le domaine de définition, les limites aux bornes du domaine de définition, les variations et tracer le graphe de la fonction exponentielle.
- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse ?
- Enoncer le théorème de convergence monotone (pour les suites).
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, on considère l'équation $f(x) = k$.
(a) Citer le théorème et ses hypothèses permettant d'assurer l'existence de solutions à cette équation.
(b) Avec quelle hypothèse supplémentaire a-t-on l'unicité de la solution ?
- Citer le théorème de la bijection.
- Enoncer la formule de Poincaré qui permet d'exprimer $P(A \cup B)$.
- Enoncer la formule des probabilités composées pour 4 événements : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \dots$
- Sous quelles conditions les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment un système complet d'événements ?

Exercice 2

Résoudre le système linéaire suivant : $(S) \begin{cases} x & & + z & = & 1 \\ x & - y & & = & 2 \\ 2x & - y & + z & = & 3 \end{cases}$

On commence par échelonner le système (S) à l'aide du pivot de Gauss :

$$(S) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{cases} x & & + z & = & 1 \\ x & - y & & = & 2 \\ & - y & - z & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x & & + z & = & 1 \\ & - y & - z & = & 1 \end{cases}$$

On a alors un système échelonné avec deux inconnues principales et une inconnue secondaire.

$$(S) \iff \begin{cases} x & = & 1 - z \\ y & = & -1 - z \end{cases}$$

On a alors $\mathcal{S} = \{(1 - z, -1 - z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3

Jeudi avant les vacances, c'était le repas de Noël au lycée Charles de Gaulle. Une étude montre que :

- 66 % des élèves du lycée ont prévu de porter un pull de Noël ;
- parmi les élèves qui ont prévu de porter un pull, 5 % auront également un bonnet de Père Noël ;
- parmi ceux qui ne porteront pas de pull, 84 % porteront un bonnet de Père Noël.

On sélectionne au hasard un élève du lycée et on considère les événements suivants :

- A : "l'élève porte un pull de Noël" ;
- B : "l'élève porte un bonnet de Père Noël".

1. Donner les valeurs de $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P_A(B)$, $P_A(\overline{B})$, $P_{\overline{A}}(B)$, $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

D'après l'énoncé, on a :

- $P(A) = 0,66$;
- $P_A(\overline{B}) = 0,95$;
- $P_{\overline{A}}(B) = 0,84$.

On en déduit :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,34$;
- $P_A(B) = 1 - P_A(\overline{B}) = 0,05$;
- $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{A}}(B) = 0,16$.

2. Calculer la probabilité que cet élève porte un bonnet de Père Noël.

On arrondira le résultat à 0,01 près.

D'après la formule des probabilités totales, $\{A, \overline{A}\}$ étant un système complet d'événements de probabilités non nulles :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) \\ &= 0,66 \times 0,05 + 0,34 \times 0,84 \\ &= 0,033 + 0,2856 \\ &\simeq 0,32 \end{aligned}$$

3. L'élève ne porte pas de bonnet de Père Noël. Quelle est la probabilité qu'il porte alors un pull de Noël ?

On arrondira le résultat à 0,01 près.

Il nous faut calculer $P_{\overline{B}}(A)$. D'après la formule de Bayes, on a :

$$\begin{aligned} P_{\overline{B}}(A) &= \frac{P(A) \times P_A(\overline{B})}{P(\overline{B})} \\ &= \frac{0,66 \times 0,95}{1 - 0,32} \\ &= \frac{0,627}{0,68} \\ &\simeq 0,92 \end{aligned}$$

Exercice 4

On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = 1 & u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* & 4u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}. \end{cases}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de u_n en fonction de n .

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout l'équation caractéristique associée :

$$4r^2 - 4r + 1 = 0$$

Cette équation se met sous la forme :

$$(2r - 1)^2 = 0.$$

Ainsi elle possède une unique solution $r_0 = \frac{1}{2}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u_n = (\lambda + n\mu) \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Utilisons les valeurs de u_0 et u_1 pour déterminer λ et μ . On a : $u_0 = \lambda = 1$ et $u_1 = (\lambda + \mu) \times \frac{1}{2} = 2$. Ainsi

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mu = 3.$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = (1 + 3n) \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Exercice 5

Factoriser au maximum le polynôme $P(x) = x^3 - 11x^2 + 31x - 21$.

On commence par chercher une racine évidente de $P(x) = x^3 - 11x^2 + 31x - 21$. On a :

$$P(1) = 1^3 - 11 \times 1^2 + 31 \times 1 - 21 = 1 - 11 + 31 - 21 = 0$$

Donc, 1 est racine de P . Il existe donc un polynôme Q tel que $P(x) = (x - 1)Q(x)$. On présente les deux méthodes pour déterminer Q :

Méthode 1 : Identification des coefficients

Il existe un polynôme Q de degré $3 - 1 = 2$ tel que pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)Q(x) \\ &= (x - 1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c \end{aligned}$$

Les polynômes $x^3 - 11x^2 + 31x - 21$ et $ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$ sont égaux, leurs coefficients le sont aussi :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -11 \\ c - b = 31 \\ -c = -21 \end{cases} \quad \text{donc :} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \\ c = 21 \end{cases}$$

Conclusion : $P(x) = (x - 1)(x^2 - 10x + 21)$.

Méthode 2 : Division euclidienne

x^3	$-$	$11x^2$	$+$	$31x$	$-$	21	$x - 1$
x^3	$-$	x^2					$x^2 - 10x + 21$
$-$							
	$10x^2$	$+$	$31x$	$-$	21		
	$-$	$10x^2$	$+$	$10x$			
$21x - 21$							
$21x - 21$							
0							

Conclusion : $P(x) = (x - 1)(x^2 - 10x + 21)$

Il nous reste maintenant à factoriser $Q(x) = x^2 - 10x + 21$. Pour cela, il nous faut trouver ses racines. On calcule donc son discriminant : $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 21 = 100 - 84 = 16 > 0$. Il y a donc deux racines, qui sont :

$$x_1 = \frac{10 - 4}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{10 + 4}{2} = 7$$

Ainsi, $Q(x) = (x - 3)(x - 7)$ et donc

$$\boxed{P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 7)}$$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n}}{5^{n+2}}$$

Remarquons que $\frac{2^{2n}}{5^{n+2}} = \frac{(2^2)^n}{5^2 \times 5^n} = \frac{1}{25} \times \frac{4^n}{5^n} = \frac{1}{25} \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

Comme $\frac{4}{5} \in]-1, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n}}{5^{n+2}} = 0$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^n k^2$

On sait que $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, alors :

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{n^3(1 \times (1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n}))}{6n^3} = \frac{1 \times (1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{6}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et donc par sommes et produits : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \times (1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n}) = 2$. Ainsi par quotient,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) - e^x$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) - e^x = -\infty$.

4. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x - 1}}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 1 = 2$ ainsi par quotient $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = +\infty$. Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc

par composée de limites $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x - 1}} = +\infty$.

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - \frac{1}{x} + 1}{x^2 + 1}$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \frac{1}{x} + 1 = 1$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 1 = +\infty$. Ainsi par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - \frac{1}{x} + 1}{x^2 + 1} = 0.$$

Exercice 7

1. Résoudre l'équation suivante $\frac{3x}{3x+2} + \frac{2}{6x+4} + \frac{1}{x} = 1$.

On commence par déterminer le domaine de définition de l'équation. Les valeurs interdites vérifient $3x + 2 = 0$, $6x + 4 = 0$ et $x = 0$. Ainsi les valeurs interdites sont $-\frac{2}{3}$ et 0 . Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{2}{3}\}$, résolvons donc l'équation.

On a

$$\begin{aligned} \frac{3x}{3x+2} + \frac{1}{3x+2} + \frac{1}{x} - 1 &= 0 \\ \frac{3x \times x}{x(3x+2)} + \frac{x}{x(3x+2)} + \frac{3x+2}{x(3x+2)} - \frac{x(3x+2)}{x(3x+2)} &= 0 \\ \frac{3x^2 + x + 3x + 2 - 3x^2 - 2x}{x(3x+2)} &= 0 \\ \frac{2x+2}{x(3x+2)} &= 0 \end{aligned}$$

Un quotient est nul ssi son numérateur est nul ainsi $2x+2=0$ et donc $x=-1$. On vérifie que $-1 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{2}{3}\}$.
Ainsi $\mathcal{S} = \{-1\}$.

2. Résoudre l'inéquation : $\frac{3x^2 - x - 2}{7x - 21} \geq 0$

On commence par remarquer que $\frac{21}{7} = 3$ est valeur interdite.

On étudie le signe du numérateur et du dénominateur :

$$7x - 21 > 0 \iff 7x > 21 \iff x > 3.$$

Pour le numérateur, on calcule le discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 1 + 24 = 25 = 5^2$, on a $x_1 = \frac{-(-1) - 5}{2 \times 3} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{1+5}{6} = 1$. On peut alors dresser le tableau de signes du quotient :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	1	3	$+\infty$
$7x - 21$			-	0	+
$3x^2 - x - 2$	+	0	-	0	+
$\frac{3x^2 - x - 2}{7x - 21}$	-	0	+	0	+

On en déduit la solution de notre inéquation $\mathcal{S} = [-\frac{2}{3}, 1] \cup]3, +\infty[$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie $f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 7}{4x - 2}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Déterminer le domaine de définition de f .

Les fonctions $x \mapsto 2x^2 - 13x + 7$ et $x \mapsto 4x - 2$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto 4x - 2$ s'annule en $x = \frac{1}{2}$, ainsi f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x)$. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

On a d'une part : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 - 13x + 7) = 1$ et d'autre part : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} 4x - 2 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} 4x - 2 = 0^-$. Ainsi par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$$

Ainsi la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.

3. (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

On est face à une forme indéterminée, factorisons par le terme prépondérant :

$$f(x) = \frac{x^2(1 - \frac{13}{x} + \frac{7}{x^2})}{x(4 - \frac{2}{x})} = x \times \frac{1 - \frac{13}{x} + \frac{7}{x^2}}{4 - \frac{2}{x}}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{13}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$. Ainsi par somme et quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{13}{x} + \frac{7}{x^2}}{4 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{4}$. On conclut que par produit $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.

(b) Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{4x - 2}$.

Calculons d'une part :

$$ax + b + \frac{c}{4x - 2} = \frac{(ax + b)(4x - 2) + c}{4x - 2} = \frac{4ax^2 - 2ax + 4bx - 2b + c}{4x - 2} = \frac{4ax^2 + (4b - 2a)x + c - 2b}{4x - 2}$$

On identifie alors avec l'expression de $f(x)$, on obtient :

$$4a = 2, \quad 4b - 2a = -13, \quad c - 2b = 7$$

Ainsi :

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -3, \quad c = 1$$

En conclusion,

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 3 + \frac{1}{4x - 2}.$$

(c) En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique dont on déterminera l'équation.

On a alors $f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 3\right) = \frac{1}{4x - 2}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x - 2} = 0$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 0$$

On en conclut que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x - 3$ au voisinage de $+\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4x - 2} = 0$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 0$$

On en conclut que $\mathcal{C}_f$ admet également une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x - 3$ au voisinage de $-\infty$.

4. (a) Définir cette fonction en Python.

```
def f(x) :  
    y=(2*x**2-13*x+7)/(4*x-2)  
    return y
```

(b) Recopier et compléter les instructions suivantes pour tracer la courbe de f sur $\left] \frac{1}{2}, 10 \right]$.

```
x=np.arange(.....,.....,.....)  
plt.plot(.....)
```

```
x=np.arange(0.50001, 10, 0.00001)  
plt.plot(x, f(x))
```

Exercice 9

Soient (u_n) et (v_n) définies respectivement par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Conclure.
2. On peut démontrer (nous l'admettrons ici) que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers $e \simeq 2.72$. Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de e .