# Interrogation n° 11

## Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3 + x^2 + 1}$
2. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{3x^2 - 6x + 1}{7 - x}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{\ln(x)}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 5x - 6}{-4x^3 - 12x^2}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + \ln(x)}{\mathrm{e}^x - 2x - 4}$

## Exercice 2

Montrer que l'équation $x^3 - x^2 = 2$ admet une unique solution sur $[1;2]$.

## Exercice 3

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2} + 3$.
Montrer que la fonction $f$ réalise une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ à déterminer.

# Corrigé : Interrogation n° 11

## Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^3+x^2+1}$

> On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+x^2+1) = +\infty$ donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^3+x^2+1} = 0}$.

2. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{3x^2-6x+1}{7-x}$

> On a $\lim\limits_{x\to 7}(3x^2-6x+1) = 106$ puis comme la fonction n'est pas définie en 7, il faut distinguer les limites à gauche et à droite de 7.
> On a : $\lim\limits_{x\to 7^-} (7-x) = 0^+$ et donc $\lim\limits_{x\to 7^-} \dfrac{1}{7-x} = +\infty$. Ainsi par quotient $\lim\limits_{x\to 7^-} \dfrac{3x^2-6x+1}{7-x} = +\infty$.
> On a : $\lim\limits_{x\to 7^+} (7-x) = 0^-$ et donc $\lim\limits_{x\to 7^+} \dfrac{1}{7-x} = -\infty$. Ainsi par quotient $\lim\limits_{x\to 7^+} \dfrac{3x^2-6x+1}{7-x} = -\infty$.
> Ainsi les limites à gauche et à droite ne sont pas égales donc la fonction $\boxed{\text{n'admet pas de limite en 7}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{\ln(x)}$

> On a $\lim\limits_{x\to 1}(x) = 1$ puis comme la fonction n'est pas définie en 1, il faut distinguer les limites à gauche et à droite de 1.
> On a : $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^-$ et donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\ln(x)} = -\infty$.
> On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x) = 0^+$ et donc $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$.
> Ainsi les limites à gauche et à droite ne sont pas égales donc la fonction $\boxed{\text{n'admet pas de limite en 1}}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x^2+5x-6}{-4x^3-12x^2}$

> Il s'agit d'une forme indéterminée que l'on factorise pour lever l'indétermination. On a :
> $$\frac{x^3-3x^2+5x-6}{-4x^3-12x^2} = \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^3}}{-4-\frac{12}{x}}$$
> Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{12}{x} = 0$ donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x^2+5x-6}{-4x^3-12x^2} = -\dfrac{1}{4}}$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\ln(x)}{e^x-2x-4}$

> Il s'agit d'une forme indéterminée que l'on factorise pour lever l'indétermination. On a :
> $$\frac{x^2+\ln(x)}{\mathrm{e}^x-2x-4}=\frac{x^2\left(1+\frac{\ln(x)}{x^2}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1-\frac{2x}{\mathrm{e}^x}-\frac{4}{\mathrm{e}^x}\right)}=\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\times\frac{1+\frac{\ln(x)}{x^2}}{1-\frac{2x}{\mathrm{e}^x}-\frac{4}{\mathrm{e}^x}}$$
> Or d'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{\ln(x)}{x^2}=1$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{\mathrm{e}^x}=0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{\mathrm{e}^x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{2x}{\mathrm{e}^x}-\frac{4}{\mathrm{e}^x}=1$. On en déduit que par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\ln(x)}{x^2}}{1-\frac{2x}{\mathrm{e}^x}-\frac{4}{\mathrm{e}^x}}=1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}=0$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+\ln(x)}{\mathrm{e}^x-2x-4}=0}$.

## Exercice 2

Montrer que l'équation $x^3-x^2=2$ admet une unique solution sur $[1;2]$.

> Posons $f(x)=x^3-x^2$. La fonction $f$ est continue sur $[1;2]$ car polynomiale. De plus, $f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$. Or pour $x\in[1;2]$, $x>0$ et $3x-2>0$ car $3x-2>0 \iff x>\frac{2}{3}$. Ainsi pour $x\in[1;2]$, $f'(x)>0$. La fonction $f$ est strictement croissante sur $[1;2]$. De plus,
> $$f(1)=0 \quad \text{et } f(2)=4.$$
> Donc $2\in[f(1);f(2)]$. On peut conclure d'après le théorème des valeurs intermédiaires version forte qu'il existe un unique $x\in[1;2]$ tel que $f(x)=2$ ce qui signifie que l'équation $x^3-x^2=2$ admet une unique solution sur $[1;2]$.

## Exercice 3

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $I=[0,+\infty[$ par $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+3$.
Montrer que la fonction $f$ réalise une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ à déterminer.

> La fonction $f$ est continue sur $I$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions continues sur $I$ et dérivables sur $]0,+\infty[$. On a pour $x\in]0,+\infty[$,
> $$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+x>0.$$
> Ainsi $f$ est strictement croissante sur $I$. Ainsi d'après le théorème de la bijection $f$ réalise une bijection de $I$ sur $f(I)$. Comme $f$ est continue et strictement croissante et que $f(0)=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, on a $f(I)=[3,+\infty[$.