Interrogation n° 11

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to 2} e^{x^2-4}$
2. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^2-x+1}$
3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x-2}{x-\ln(x)}$
4. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{2x^2-1}$
5. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x+2x-1}{x^2+\ln(x)}$
6. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-x-2}{x-1}$

Exercice 2

Montrer que l'équation $\ln(x) = 2 - x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} + 2x + 2$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
2. **Question bonus.** En déduire le nombre de solutions de l'équation :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\pi}\sqrt{x} = \frac{1}{\pi}.$$

Corrigé : Interrogation n° 11

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 2} \mathrm{e}^{x^2-4}$

> On a $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$. Par composée de limite, on obtient $\lim\limits_{x\to 2}\mathrm{e}^{x^2-4}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2-x+1}$

> Au numérateur, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$.
>
> Au dénominateur, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x+1)=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2-x+1}=0$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-2}{x-\ln(x)}$

> Au numérateur, $\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$.
>
> Au dénominateur, $\lim\limits_{x\to 0} x-\ln(x)=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{x-\ln(x)}=0$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{2x^2-1}$

> A priori, il s'agit d'une forme indéterminée. On factorise par le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur, à savoir x^2. On obtient :
> $$\frac{2x^2-3x+1}{2x^2-1}=\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x^2}}.$$
> On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{2x^2-1}=1$.

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x+2x-1}{x^2+\ln(x)}$

> A priori, il s'agit d'une forme indéterminée. Factorisons par le terme dominant :
> $$\frac{\mathrm{e}^x+2x-1}{x^2+\ln(x)}=\frac{\mathrm{e}^x\left(1+\frac{2x}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}{x^2\left(1+\frac{\ln(x)}{x^2}\right)}=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\left(\frac{1+\frac{2x}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x}}{1+\frac{\ln(x)}{x^2}}\right).$$
> Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\mathrm{e}^x}=0$ et on sait aussi que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}=0$. Ainsi
> $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)=1.$$

De plus, par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$$

Par quotient, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1 + \frac{2x}{e^x} - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{\ln(x)}{x^2}}\right) = 1.$$

Par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$. Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 2x - 1}{x^2 + \ln(x)} = +\infty.$$

6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

Au numérateur, $\lim_{x\to 1}(x^2 - x - 2) = -2$.
Au dénominateur, la fonction n'étant pas définie pour $x = 1$, il faut distinguer les limites à gauche et à droite. On a $\lim_{x\to 1^-} x - 1 = 0^-$ et $\lim_{x\to 1^+} x - 1 = 0^+$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = -\infty.$$

Ainsi cette fonction n'admet pas de limite en 1.

Exercice 2

Montrer que l'équation $\ln(x) = 2 - x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x - 2 + \ln(x).$$

La fonction f est continue et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$. Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ainsi $0 \in]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$ donc d'après le corollaire du théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} + 2x + 2$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

La fonction f est continue sur I comme somme de fonctions continues. Etudions ses variations. Soit $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 = \frac{1 + 4\sqrt{x}}{2}.$$

Or pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\sqrt{x} > 0$, ainsi $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante.
De plus, on a $f(0) = 2$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I vers $[2; +\infty[$.

2. **Question bonus.** En déduire le nombre de solutions de l'équation :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\pi}\sqrt{x} = \frac{1}{\pi}.$$

> On a pour $x > 0$,
>
> $$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\pi}\sqrt{x} = \frac{1}{\pi} \iff \frac{\pi - 2x}{\pi\sqrt{x}} = \frac{1}{\pi} \iff \frac{\pi - 2x}{\sqrt{x}} = 1 \iff \sqrt{x} = \pi - 2x \iff \sqrt{x} + 2x = \pi \iff f(x) = \pi + 2.$$
>
> La fonction f réalisant une bijection de $[0;+\infty[$ vers $[2;+\infty[$ et $\pi + 2 \in [2;+\infty[$, l'équation admet une unique solution dans $[0;+\infty[$.