Interrogation n° 10

Exercice 1 *Questions de cours*

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, donner les définitions suivantes :

1. f est injective
2. f est surjective
3. f est bijective

Exercice 2

On définit l'application : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{6}{5} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{8}{5} \right\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{8x-3}{-5x+6} \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Corrigé : Interrogation n° 10

Exercice 1 *Questions de cours*

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, donner les définitions suivantes :

1. f est injective
2. f est surjective
3. f est bijective

Exercice 2

On définit l'application : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{6}{5} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{8}{5} \right\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{8x-3}{-5x+6} \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{8}{5}\}$, montrons que l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{6}{5}\}$ et déterminons la. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{8}{5}\}$, on a :

$$f(x) = y \iff \frac{8x-3}{-5x+6} = y \iff 8x - 3 = y(-5x+6) \iff x(8+5y) = 6y+3.$$

Or $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{8}{5}\}$ donc $8 + 5y \neq 0$, ainsi $x = \frac{6y+3}{8+5y}$. Il reste à vérifier que $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{6}{5}\}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $x = \frac{6}{5}$. On a alors :

$$x = \frac{6}{5} \iff \frac{6y+3}{8+5y} = \frac{6}{5} \iff 5(3+6y) = 6(8+5y) \iff 15 = 48 \quad \text{Absurde.}$$

Ainsi $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{6}{5}\}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{8}{5}\}$ admet bien un unique antécédent.
On en conclut que f est bijective sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{6}{5}\}$ et sa bijection réciproque f^{-1} est définie de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{8}{5}\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{6}{5}\}$ par

$$f^{-1}(x) = \frac{6x+3}{8+5x}.$$

