Interrogation n° 10

Exercice 1 *Question de cours*

Enoncer le théorème de la bijection.

Exercice 2

On définit l'application : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{3}{5} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{2}{5} \right\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{-5x+3} \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Corrigé : Interrogation n° 10

Exercice 1 *Question de cours*

Enoncer le théorème de la bijection.

Exercice 2

On définit l'application : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{3}{5} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{2}{5} \right\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{-5x+3} \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}$, montrons que l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{5}\}$ et déterminons-la. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}$, on a :

$$f(x) = y \iff \frac{2x+1}{-5x+3} = y \iff 2x+1 = y(-5x+3) \iff x(2+5y) = 3y-1.$$

Or $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}$ donc $2+5y \neq 0$, ainsi $x = \dfrac{3y-1}{2+5y}$. Il reste à vérifier que $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{5}\}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $x = \frac{3}{5}$. On a alors :

$$x = \frac{3}{5} \iff \frac{3y-1}{2+5y} = \frac{3}{5} \iff 5(3y-1) = 3(2+5y) \iff -5 = 6 \quad \text{Absurde.}$$

Ainsi $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{5}\}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}$ admet bien un unique antécédent.
On en conclut que f est bijective sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{5}\}$ et sa bijection réciproque f^{-1} est définie de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{5}\}$ par

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2+5x}.$$