

Corrigé du DS n° 5

Exercice 1 , Piste bleue

1. Avec le système complet d'événements (R_0, V_0, J_0) , et en appliquant la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(R_1) &= P(R_0 \cap R_1) + P(V_0 \cap R_1) + P(J_0 \cap R_1) \\ &= P(R_0)P_{R_0}(R_1) + P(V_0)P_{V_0}(R_1) + P(J_0)P_{J_0}(R_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage est $\boxed{P(R_1) = \frac{2}{5}}$.

De même, on obtient pour $P(V_1)$:

$$\begin{aligned} P(V_1) &= P(R_0)P_{R_0}(V_1) + P(V_0)P_{V_0}(V_1) + P(J_0)P_{J_0}(V_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité de tirer une boule verte au premier tirage est $\boxed{P(V_1) = \frac{1}{3}}$.

Comme (R_1, V_1, J_1) est un système complet d'événements, on a :

$$P(J_1) = 1 - P(R_1) - P(V_1) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{15 - 6 - 5}{15} = \frac{4}{15}$$

Ainsi, la probabilité de tirer une boule jaune au premier tirage est $\boxed{P(J_1) = \frac{4}{15}}$.

2. On cherche $P(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$. Avec la formule des probabilités composées :

$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) \times P_{V_1 \cap V_2}(V_3) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{75}$$

Ainsi, la probabilité que les trois premières boules tirées soient vertes vaut $\boxed{\frac{4}{75}}$.

3. (a) Comme (R_n, V_n, J_n) est un système complet d'événements, on a :

$$r_n + v_n + j_n = P(R_n) + P(V_n) + P(J_n) = 1.$$

Ainsi $\boxed{r_n + v_n + j_n = 1}$.

(b) On considère le système complet d'événements (R_n, V_n, J_n) . Alors, en appliquant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= P(R_{n+1}) = P(R_n \cap R_{n+1}) + P(V_n \cap R_{n+1}) + P(J_n \cap R_{n+1}) \\ &= P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(R_{n+1}) + P(J_n)P_{J_n}(R_{n+1}) \\ &= r_n \times \frac{3}{5} + v_n \times \frac{2}{5} + j_n \times \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, on a $j_n = 1 - r_n - v_n$, on en déduit que :

$$r_n = \frac{3}{5}r_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{1}{5}(1 - r_n - v_n) = \frac{2}{5}r_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{1}{5}.$$

Ainsi $\boxed{r_{n+1} = \frac{2}{5}r_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{1}{5}}$.

Pour v_{n+1} , on a de la même façon,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= P(V_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(V_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(V_{n+1}) + P(J_n)P_{J_n}(V_{n+1}) \\ &= r_n \times \frac{1}{5} + v_n \times \frac{2}{5} + j_n \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{5}(1 - r_n - v_n) \\ &= -\frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Ainsi $v_{n+1} = -\frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}$.

Nous sommes alors en mesure d'exprimer r_{n+2} . En utilisant, l'expression de r_{n+1} , on obtient :

$$r_{n+2} = \frac{2}{5}r_{n+1} + \frac{1}{5}v_{n+1} + \frac{1}{5}$$

Il reste alors à remplacer v_{n+1} par son expression, on a :

$$r_{n+2} = \frac{2}{5}r_{n+1} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}r_{n+1} - \frac{1}{25}r_n + \frac{7}{25}$$

En résumé, on a obtenu que $r_{n+2} = \frac{2}{5}r_{n+1} - \frac{1}{25}r_n + \frac{7}{25}$.

(c) Pour tout $n \geq 1$, on a $r_n = u_n + \frac{7}{16}$. Alors, avec la relation précédente,

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= \frac{2}{5}r_{n+1} - \frac{1}{25}r_n + \frac{7}{25} \Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{7}{16} = \frac{2}{5}\left(u_{n+1} + \frac{7}{16}\right) - \frac{1}{25}\left(u_n + \frac{7}{16}\right) + \frac{7}{25} \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{7}{16} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{14}{80} - \frac{1}{25}u_n - \frac{7}{400} + \frac{7}{25} \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{7}{16} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n + \frac{70 - 7 + 112}{400} \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{7}{16} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n + \frac{175}{400} \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \end{aligned}$$

car $\frac{175}{400} = \frac{7 \times 25}{16 \times 25} = \frac{7}{16}$

Ainsi, (u_n) est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2**.

(d) L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est $x^2 = \frac{2}{5}x - \frac{1}{25}$ donc $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = 0$.

Il y a donc une racine double $x_0 = \frac{1}{5}$. Ainsi il existe λ et μ tels que :

$$\forall n \geq 1, u_n = (\lambda n + \mu) \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Or $u_1 = r_1 - \frac{7}{16} = \frac{2}{5} - \frac{7}{16} = \frac{32 - 35}{80} = -\frac{3}{80}$ (en utilisant la question 1.).

Et $u_2 = r_2 - \frac{7}{16} = \frac{32}{75} - \frac{7}{16} = \frac{16 \times 32 - 7 \times 75}{1200} = \frac{512 - 525}{1200} = -\frac{13}{1200}$ (en utilisant la question 2.). On a donc :

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{3}{80} = (\lambda \times 1 + \mu) \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 \\ u_2 = -\frac{13}{1200} = (\lambda \times 2 + \mu) \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = -\frac{3}{16} = -\frac{9}{48} \\ 2\lambda + \mu = -\frac{13}{48} \end{cases}$$

En faisant $L_2 - L_1$, on obtient : $\lambda = \frac{-13 + 9}{48} = \frac{-4}{48}$.

Avec L_1 , on a donc : $\mu = \frac{-9+4}{48} = \frac{-5}{48}$.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{-4n-5}{48} \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

On en déduit alors l'expression de r_n . Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \frac{-4n-5}{48} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{7}{16}$.

4. Python

```
(a)
1 def ChoixUrne():
2     if np.rand() < 1/3 :
3         y=1
4     elif 1/3 < np.rand() < 2/3 :
5         y=2
6     else :
7         y=3
8     return y
```

```
(b)
1 def urneRouge():
2     if np.rand() < 3/5 :
3         y=1
4     elif 3/5 < np.rand() < 4/5 :
5         y=2
6     else :
7         y=3
8     return y
```

```
(c)
1 def urneVerte():
2     if np.rand() < 2/5 :
3         y=1
4     elif 2/5 < np.rand() < 4/5 :
5         y=2
6     else :
7         y=3
8     return y
```

```
(d)
1 def urneJaune():
2     if np.rand() < 1/5 :
3         y=1
4     elif 1/5 < np.rand() < 3/5 :
5         y=2
6     else :
7         y=3
8     return y
```

```
(e)
1 def Simu(n):
2     y=ChoixUrne()
3     for k in range(n):
4         if y==1 :
5             y=urneRouge()
6         elif y==2 :
7             y=urneVerte()
8         else :
9             y=urneJaune()
10    return y
```

Exercice 2 , Piste bleue ET rouge

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice de l'application linéaire f dans la base canonique.

2. On pose le calcul :

$$A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3$$

On a donc bien : $A^2 = 3A - 2I_3$.

3. Soit $u \in E$. On a $f(u) = Au$ donc $f^2(u) = f \circ f(u) = A(Au) = A^2u$ par associativité. Ainsi, d'après la question précédente, on a

$$A^2u - 3Au + 2I_3u = f^2(u) - 3f(u) + 2\text{Id}_E(u) = (f^2 - 3f + 2\text{Id}_E)(u) = 0_E.$$

Ainsi $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E$ est l'endomorphisme nul donc $f^2 = 3f - 2\text{Id}_E$.

4. D'après la question précédente, on a $f \circ \left(\frac{-1}{2}(f - 3\text{Id}_E)\right) = \left(\frac{-1}{2}(f - 3\text{Id}_E)\right) \circ f = \text{Id}_E$.

D'après le cours, f est bijective et sa bijection réciproque est $f^{-1} = \frac{-1}{2}(f - 3\text{Id}_E)$.

5. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) &\iff \begin{cases} 2x - y + z - 2x = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x - y + 2z - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille composée de l'unique vecteur non nul $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc génératrice et libre. C'est donc une base de $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.

Avec le même raisonnement, on montre que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une famille génératrice de $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ composée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base.

6. Commençons par remarquer que les deux ensembles considérés donc bien des sous-espaces vectoriels car ce sont les noyaux de deux applications linéaires. De plus, d'après la question précédente et le théorème de concaténation des bases, il suffit de montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E pour conclure qu'ils sont supplémentaires dans E . On

montre par la méthode habituelle qu'elle est libre. Puis, comme elle est composée de 3 vecteurs et que la dimension de E est $3 \times 1 = 3$, elle est également génératrice, c'est donc une base.

Ainsi, les deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E .

7. (a) En résolvant le système, on trouve que $p = f - \text{Id}_E$ et $q = 2\text{Id}_E - f$ conviennent (on remarquera que ce sont bien des endomorphismes comme combinaisons linéaires d'endomorphismes).

(b) On sait déjà que p et q sont des endomorphismes. De plus, puisque f et Id_E commutent, on a :

$$p^2 = (f - \text{Id}_E)^2 = f^2 - 2f + \text{Id}_E = 3f - 2\text{Id}_E - 2f + \text{Id}_E = f - \text{Id}_E = p$$

et,

$$q^2 = (2\text{Id}_E - f)^2 = 4\text{Id}_E - 4f + f^2 = 4\text{Id}_E - 4f + 3f - 2\text{Id}_E = 2\text{Id}_E - f = q$$

Ainsi les endomorphismes p et q sont des projecteurs.

(c) On a, d'une part,

$$p \circ q = (f - \text{Id}_E) \circ (2\text{Id}_E - f) = 2f - f^2 - 2\text{Id}_E + f = -f^2 + 3f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

et d'autre part,

$$q \circ p = (2\text{Id}_E - f) \circ (f - \text{Id}_E) = 2f - 2\text{Id}_E - f^2 + f = -f^2 + 3f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On a bien : $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(d) Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: " $f^n = 2^n p + q$ ".

Initialisation Pour $n = 0$, on a $f^0 = \text{Id}_E$ et $2^0 p + q = p + q = \text{Id}_E$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence et les question 7.(a),(b),(c) :

$$f^{n+1} = f^n \circ f = (2^n p + q) \circ (2p + q) = 2^{n+1} p^2 + 2^n p \circ q + 2q \circ p + q^2 = 2^{n+1} p + q$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion D'après le principe de récurrence, on a bien le résultat.

Problème 1, Piste bleue, EDHEC 2024

Partie 1

1. (a) Soient $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $1 + t^2 \geq 1$ donc par croissance de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+ , on a $(1 + t^2)^n \geq 1^n$. De plus, $(1 + t^2)^n > 0$ donc

$$(1 + t^2)^{n+1} \geq (1 + t^2)^n.$$

Par décroissance de la fonction inverse, on a :

$$0 \leq \frac{1}{(1 + t^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1 + t^2)^n}.$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0, 1]$, on a donc :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

- (b) Etant décroissante et minorée par 0 (car positive), la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente d'après le théorème de convergence monotone.
2. (a) Posons pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = e^{x/2} - 1 - x$. La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ et on a, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} - 1 = \frac{e^{x/2} - 2}{2}.$$

Soit $x \in [0, 1]$ alors, par croissance de la fonction exponentielle,

$$f'(x) \leq \frac{e^{1/2} - 2}{2}.$$

Or $\frac{e^{1/2} - 2}{2} = \frac{\sqrt{e} - \sqrt{4}}{2}$ et comme $e \simeq 2.7 < 4$ et que la fonction racine est croissante sur \mathbb{R}_+ , on en déduit que $f'(x) < 0$ pour $x \in [0, 1]$.

Ainsi la fonction f est décroissante sur $[0, 1]$ et comme $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq 0$ i.e. $e^{x/2} \leq 1 + x$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $t \in [0, 1]$ alors $t^2 \in [0, 1]$ et on a, d'après la question précédente,

$$e^{t^2/2} \leq 1 + t^2.$$

Or $x \mapsto x^n$ est croissante sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$e^{nt^2/2} \leq (1 + t^2)^n.$$

Or $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur \mathbb{R}_+ , donc :

$$e^{-nt^2/2} \geq \frac{1}{(1 + t^2)^n}$$

et on conclut, par croissance de l'intégrale sur $[0, 1]$, que :

$$u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt.$$

- (c) Utilisons le résultat rappelé dans l'énoncé avec $\alpha = \frac{n}{2}$, on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

- (d) D'après la question 1.(a) et l'inégalité montrée à la question 2.(b), on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt$$

Or la fonction $t \mapsto e^{-nt^2/2}$ est positive et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt$ converge, on peut donc écrire que :

$$0 \leq u_n \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt.$$

Ainsi d'après la question 2.(c), on a :

$$0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

Partie 2

3. La fonction $t \mapsto (1 + t^2)^n$ est continue et positive sur \mathbb{R}_+ et ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+ donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1 + t^2)^n}$ est continue et positive sur \mathbb{R}_+ . Ainsi l'intégrale est impropre en $+\infty$.

On a :

$$1 + t^2 \underset{+\infty}{\sim} t^2 \text{ car } 1 \underset{+\infty}{=} o(t^2)$$

donc par passage à la puissance puis à l'inverse :

$$\frac{1}{(1 + t^2)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$$

Remarque : il s'agit du premier équivalent que l'on calcule donc on détaille bien les étapes. Si un calcul similaire se présente par la suite, on pourra aller plus vite.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$ est une intégrale convergente car c'est une intégrale de Riemann avec $2n > 1$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt$ est $\boxed{\text{convergente}}$.

4. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1, +\infty[$, on a alors $1 + t^2 \geq t^2 \geq 0$. En appliquant ensuite la fonction $x \mapsto x^n$ qui est croissante sur \mathbb{R}_+ , puis la fonction inverse qui est décroissante sur \mathbb{R}_+ , on obtient :

$$0 \leq \frac{1}{(1 + t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0, +\infty[$ (qui est licite car toutes les intégrales sont convergentes), on a :

$$0 \leq I_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt.$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^{-2n+1}}{-2n+1} \right]_1^M = \frac{1}{2n-1}$. On obtient alors l'inégalité demandée, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}.$$

(b) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$.

(c) I_n et J_n sont deux intégrales convergentes donc à l'aide de la relation de Chasles, on peut écrire que :

$$J_n = I_n + u_n.$$

Or $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0, on en déduit donc que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0}$.

5. (a) Posons $M \in \mathbb{R}_+$ et effectuons une intégration par parties sur $\int_0^M \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt$.

Posons $u(t) = \frac{1}{(1 + t^2)^n}$ et $v'(t) = 1$. On a $u'(t) = -2nt(1 + t^2)^{-n-1}$ et $v(t) = t$. Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^M \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt &= \left[\frac{t}{(1 + t^2)^n} \right]_0^M + 2n \int_0^M \frac{t^2}{(1 + t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{M}{(1 + M^2)^n} + 2n \int_0^M \frac{t^2 + 1}{(1 + t^2)^{n+1}} dt + 2n \int_0^M \frac{-1}{(1 + t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{M}{(1 + M^2)^n} + 2n \left(\int_0^M \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt - \int_0^M \frac{1}{(1 + t^2)^{n+1}} dt \right) \end{aligned}$$

Or $\frac{M}{(1+M^2)^n} \underset{M \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{M^{2n-1}}$ et $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M^{2n-1}} = 0$ donc $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{M}{(1+M^2)^n} = 0$.
 De plus, pour tout entier naturel n non nul, J_n est convergente donc :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = J_n \text{ et } \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt = J_{n+1}.$$

On en déduit donc la relation demandée, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = 2n(J_n - J_{n+1}).$$

(b) $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{1}{(1+t^2)} dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} [\arctan(t)]_0^M = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

(c) D'après la question 5.(a), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{J_n}{n} = 2(J_n - J_{n+1}).$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{J_k}{k} &= 2 \sum_{k=1}^n (J_k - J_{k+1}) \\ &= 2(J_1 - J_{n+1}) \quad \text{par télescopage} \\ &= \pi - 2J_{n+1}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{J_k}{k} = \pi$. Ainsi la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{J_n}{n}$ est **convergente** et $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_k}{k} = \pi}$.

(d) On peut proposer la fonction suivante :

```

1 def suiteJ(n) :
2     J= np.pi/2
3     for k in range(2,n+1) :
4         J=J-(1/(2*(k-1)))*J
5     return J
    
```

6. Montrons le résultat par récurrence et posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ »

Initialisation ($n = 0$) $J_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2 \times 0}{0}}{4^0} = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'après la question 5.(a), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} = J_n - \frac{1}{2n} J_n$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_{n+2} = J_{n+1} - \frac{1}{2n+2} J_{n+1}$. On a donc :

$$\begin{aligned} J_{n+2} &= \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) J_{n+1} \\ &= \left(\frac{2n+1}{2(n+1)}\right) \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+1)(2n)!}{(n+1) \times 2 \times n! \times n! \times 4^n} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+1)!(2n+2)}{2(n+1)! \times n! \times 4^n \times (2n+2)} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

Partie 3

7. (a) Notons succès l'événement "obtenir pile", sa probabilité est de $\frac{1}{2}$ car la pièce est équilibrée. On lance $2n$ fois la pièce de manière identique et indépendante, X_n est alors égale au nombre de succès, ainsi $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$.

(b) On remarque que $P(X_n = Y_n) = P(X_n = n)$ puisqu'on lance $2n$ fois la pièce, ainsi on a :

$$P(X_n = Y_n) = P(X_n = n) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2n-n} = \binom{2n}{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \binom{2n}{n} \times \frac{1}{4^n} = \frac{2}{\pi} J_{n+1}.$$

On obtient donc l'égalité demandée. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = Y_n) = 0$.

(c) On remarque que $X_n + Y_n = 2n$. Ainsi :

$$P(X_n < Y_n) = P(2X_n < 2n) = P(X_n < n) \quad \text{et} \quad P(X_n > Y_n) = P(2Y_n < 2n) = P(Y_n < n).$$

Or on peut montrer avec les mêmes arguments qu'à la question 7.(a) et l'événement "faire face" que $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$.

Ainsi X_n et Y_n sont de même loi et donc $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$.

(d) On remarque que $\Omega = [X_n < Y_n] \cup [X_n > Y_n] \cup [X_n = Y_n]$. Or les trois événements sont disjoints donc

$$P(\Omega) = P(X_n < Y_n) + P(X_n > Y_n) + P(X_n = Y_n)$$

or $P(\Omega) = 1$ et $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$ d'après la question précédente donc :

$$P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(X_n = Y_n).$$

Or d'après la question 7.(b), $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = Y_n) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2}$.

Problème 2, Piste bleue, EDHEC 2025

Partie 1

1. On rappelle que $B_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$. On a

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{k+n}{k} &= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{1 \cdot 2 \cdots n} \\ &= \frac{(2n)!}{n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \binom{2n}{n} \quad \text{d'après la formule des coefficients binomiaux} \end{aligned}$$

$$\text{donc } B_n = \frac{1}{4^n} \prod_{k=1}^n \frac{k+n}{k} = \prod_{k=1}^n \frac{k+n}{4k}$$

$$B_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+n}{4k}$$

```

1 def B(n):
2     P = 1
3     for k in range(1, n+1):
4         P = P * (k+n)/(4*k)
5     return P

```

Partie 2

On pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$. Remarquons que la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc l'intégrale W_n est bien définie pour tout n

2. On calcule $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = [t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$.

3. **Décroissance de (W_n) :**

Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin t \leq 1$, donc en multipliant par $\sin^n t$ de chaque côté,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin^{n+1} t \leq \sin^n t$. Donc par croissance de l'intégrale ($\frac{\pi}{2} > 0$), on obtient $W_{n+1} \leq W_n$. Ainsi (W_n) est décroissante.

4. On calcule l'intégrale W_{n+2} à l'aide d'une intégration par parties

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \cdot \sin t dt$$

Posons :

$$\begin{aligned} u &= \sin^{n+1}(t) & \text{et} & & v'(t) &= \sin t dt \\ u' &= (n+1) \sin^n t \cos t & \text{et} & & v &= -\cos t \end{aligned}$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \cdot \sin t dt \\ &= [-\sin^{n+1} t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot (n+1) \sin^n t \cos t dt \\ &= [-\sin^{n+1} t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t dt \end{aligned}$$

— Pour $t = 0$, $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ donc $\sin^{n+1}(0) \cos(0) = 0$

— Pour $t = \frac{\pi}{2}$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ donc $\sin^{n+1}(\frac{\pi}{2}) \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

On obtient donc :

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t dt$$

Mais,

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$$

donc

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t (1 - \sin^2 t) dt = (n+1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt \right) \\ &= (n+1) (W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

On regroupe les W_{n+2} :

$$W_{n+2} + (n+1)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$$

5. Soit n un entier naturel. On note alors \mathcal{P}_n la proposition : « $W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n$ et $W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$ »

Initialisation Pour $n = 0$, on a $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$. D'un autre côté, $B_0 = 1$ donc $W_0 = \frac{\pi}{2} B_0$ et $W_1 = \frac{1}{(0+1)B_0}$.

On a vérifié que \mathcal{P}_0 est vraie

Hérédité On suppose que la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang n . On a d'une part

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)} &= W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{\pi}{2} B_n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{2(n+1)} \prod_{k=1}^n \frac{k+n}{4k} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1) \times 2n \times \dots \times (n+1)}{2(n+1) \times 4n \times \dots \times 4} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(2n+2) \times (2n+1) \times 2n \times \dots \times (n+2)}{4(n+1) \times 4n \times \dots \times 4} \end{aligned}$$

en remarquant que

$$\frac{n+1}{2(n+1)} = \frac{2(n+1)}{4(n+1)} = \frac{2n+2}{4(n+1)}$$

On obtient alors

$$W_{2(n+1)} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+n+1}{4k} = \frac{\pi}{2} B_{n+1}$$

D'autre part, on obtient

$$\begin{aligned}
 W_{2(n+1)+1} = W_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \\
 &= \frac{2n+2}{(2n+3)(2n+1)} \frac{1}{B_n} \\
 &= \frac{2n+2}{(2n+3)(2n+1)} \prod_{k=1}^n \frac{4k}{k+n} \\
 &= \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)} \prod_{k=1}^n \frac{4k}{k+n} \\
 &= \frac{1}{2n+3} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{4k}{k+n+1} \\
 &= \frac{1}{(2n+3)B_{n+1}}
 \end{aligned}$$

Ainsi la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La proposition est héréditaire.

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n$ et $W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$.
--

6. En utilisant la question précédente, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$W_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)B_{n-1}}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 W_{2n-1} &= \frac{1}{(2n-1)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{4k}{k+n-1} \\
 &= \frac{4 \times \dots \times 4(n-1)}{(2n-1) \times 2n-2 \times \dots \times n} \\
 &= \frac{4 \times \dots \times 4(n-1) \times 4n}{2n \times 2n \times (2n-1) \times 2n-2 \times \dots \times (n+1)} \\
 &= \frac{1}{2n} \prod_{k=1}^n \frac{4k}{k+n} \\
 &= \frac{1}{2nB_n}
 \end{aligned}$$

7. La suite (W_n) étant décroissante (question 3), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$$

D'après les questions précédentes, on a donc

$\frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2nB_n}$

En multipliant par B_n , on obtient

$$\frac{1}{(2n+1)} \leq \frac{\pi}{2} (B_n)^2 \leq \frac{1}{2n} \implies \frac{2}{\pi(2n+1)} \leq (B_n)^2 \leq \frac{1}{n\pi}$$

Or, comme $\frac{2}{2n+1} \geq \frac{1}{n+1}$, on obtient enfin en composant par la racine carrée qui est croissante sur \mathbb{R}_+ :

$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$

8. En multipliant l'inégalité précédente par $\sqrt{\pi n}$, on obtient

$$\frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{\pi n} B_n \leq \frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \implies \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{\pi n} B_n \leq 1$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$. Par le théorème d'encadrement, on obtient

$$B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Partie 3

On considère dans cette section du problème une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$, définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(X_n = 1) = P(X_n = -1).$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Pour $k \geq 1$, on définit la variable

$$Y_k = \frac{X_k + 1}{2}.$$

Loi de Y_k :

- Si $X_k = 1$, alors $Y_k = \frac{1+1}{2} = 1$.
- Si $X_k = -1$, alors $Y_k = \frac{-1+1}{2} = 0$.

Ainsi Y_k ne prend que les valeurs 0 et 1. De plus,

$$P(Y_k = 1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(Y_k = 0) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Autrement dit, Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$. D'après le cours,

$$E(Y_k) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

La variance est donnée par

$$\text{Var}(Y_k) = p(1-p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(b) Posons

$$T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n X_k.$$

Remarquez que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{2} (X_k + 1) = Y_k.$$

Ainsi,

$$T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n \frac{X_k + 1}{2} = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

Comme les Y_k sont mutuellement indépendantes (d'après le lemme des coalitions) et suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, la somme suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$. Ainsi, la loi de T_n est

$$T_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2).$$

(c) Montrons que

$$S_n(\Omega) = \{2j - n, j \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

En effet, on a vu que

$$T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$$

prend toutes les valeurs entières de 0 à n . Comme

$$S_n = 2T_n - n,$$

quand $T_n = j$, on obtient

$$S_n = 2j - n.$$

Ainsi, l'ensemble des valeurs possibles de S_n est bien $\{2j - n, j = 0, 1, \dots, n\}$.

Pour la loi de S_n , pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$P(T_n = j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Par changement de variable (avec $s = 2j - n$), on obtient :

$$\forall s \in \{2j - n, 0 \leq j \leq n\}, \quad P(S_n = s) = \binom{n}{\frac{s+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit la variable aléatoire R_n comme étant le cardinal de l'ensemble $\{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket : S_k = 0\}$. Autrement dit, pour $\omega \in \Omega$, $R_n(\omega)$ est égal au nombre d'entiers $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ tels que $S_k(\omega) = 0$.

(a) Montrons que l'ensemble

$$\{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket : S_k = 0\}$$

coïncide avec

$$\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : S_{2k} = 0\}.$$

Justification :

— Pour $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, si $S_k = 0$, on doit avoir dans la somme le même nombre de 1 et de -1 . Ainsi, on a nécessairement k pair. Il existe alors un entier $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $k = 2m$.

— Réciproquement, si pour un certain m entre 1 et n , $S_{2m} = 0$, alors $2m \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ et l'on a $S_n = 0$.

Ainsi, on peut écrire

$$R_n = \text{Card}\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : S_{2k} = 0\}.$$

(b) D'après la question 9(c), on a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(S_{2k} = 0) &= \binom{2k}{\frac{0+2k}{2}} \frac{1}{2^{2k}} \\ &= \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} \\ &= B_k \end{aligned}$$

(c) En utilisant question 10.(a), on a

$$R_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{(S_{2k}=0)} = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}.$$

(d) On en déduit que l'espérance de R_n est donnée par :

$$\begin{aligned} E(R_n) &= E\left(\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n E(\mathbf{1}_{A_k}) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k) \quad \text{car } \mathbf{1}_{A_k} \text{ suit une loi de Bernoulli} \\ &= \sum_{k=1}^n B_k. \end{aligned}$$

On a donc

$$E(R_n) = \sum_{k=1}^n B_k.$$

11. On utilise une inégalité des accroissements finis.

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, qui est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à l'intervalle $[k, k+1]$,

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

En multipliant ces inégalités par 2, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Cela prouve la première inégalité :

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Pour la seconde inégalité, on applique le même raisonnement sur l'intervalle $[k-1, k]$ (pour $k \geq 1$, avec la convention que pour $k = 1$, on pourra vérifier directement) : Il existe $c \in (k-1, k)$ tel que

$$\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{2\sqrt{c}},$$

avec $\sqrt{c} \in (\sqrt{k-1}, \sqrt{k})$. Ainsi :

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1},$$

ou encore,

$$\frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

Ce qui prouve :

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

12. Nous avons précédemment établi dans la Partie 2 que, pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$

Ainsi, pour $k \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}} \leq B_k \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}}.$$

Et en utilisant la question précédente, on obtient alors

$$2\frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{\sqrt{\pi}} \leq B_k \leq 2\frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{\pi}}.$$

En sommant ces inégalités pour $k = 1$ à n , on obtient :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \leq \sum_{k=1}^n B_k \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \sqrt{k-1}.$$

En reconnaissant des sommes télescopiques, nous avons,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{n+2} - \sqrt{2}) \leq \sum_{k=1}^n B_k \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}.$$

En divisant de chaque côté par $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}$, puis en prenant la limite et en appliquant le théorème d'encadrement, on obtient

$$E(R_n) = \sum_{k=1}^n B_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

Nous avons donc l'équivalent :

$$E(R_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}$$

Partie 4

13. (a) D'après la question 8, B_n est équivalent en $+\infty$ à $\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$. Donc

$$\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \iff \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n\pi}$$

d'où le résultat en divisant par 4^n .

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}.$$

(b) En particulier, pour tout réel $x \in [0, 4[$, l'expression

$$\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\pi n} \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

On a de plus

$$\sqrt{\pi n} \left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \sqrt{\pi n} \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

Or, comme $\frac{x}{4} < 1$, la série $\sum \sqrt{\pi n} \left(\frac{x}{4}\right)^n$ converge comme série géométrique dérivée donc la série $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge par comparaison de séries à termes positifs. Ainsi, par le critère de comparaison, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \text{ converge pour tout } x \in [0, 4[.$$

Soit f la fonction définie sur $[0, 4[$ par :

$$\forall x \in [0, 4[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}.$$

14. Pour $0 \leq x < y < 4$, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \frac{y^n}{\binom{2n}{n}},$$

puisque la dénominateur est positif et la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0, 4[$. En sommant terme à terme, on obtient

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{\binom{2n}{n}} = f(y).$$

Ainsi, f est croissante sur $[0, 4[$.

15. (a) Pour tout $x \in [0, 4[$ et tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{x^n}{4^n B_n}$$

et d'après l'inégalité de la question 7,

$$\sqrt{\pi(n+1)} \geq \frac{1}{B_n} \geq \sqrt{\pi n}$$

Ce qui donne

$$\sqrt{n\pi} \left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi(n+1)} \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

En appliquant alors les inégalités $\sqrt{n} \geq 1$ et $\sqrt{n+1} \leq n+1$, on obtient le résultat demandé,

$$\boxed{\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi(n+1)} \left(\frac{x}{4}\right)^n.}$$

(b) En sommant ces inégalités pour $n \geq 1$, on obtient :

D'une part, en reconnaissant une série géométrique,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \geq \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n = \sqrt{\pi} \frac{\frac{x}{4}}{1 - \frac{x}{4}} = \sqrt{\pi} \frac{x}{4-x}.$$

D'autre part, la série de droite étant convergente par comparaison,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{x}{4}\right)^n.$$

Pour évaluer la somme $\sum_{n \geq 1} (n+1) \left(\frac{x}{4}\right)^n$, on remarque que cette somme se décompose en

$$\sum_{n \geq 1} (n+1) \left(\frac{x}{4}\right)^n = \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{x}{4}\right)^n + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{x}{4}\right)^n.$$

Or, pour $|u| < 1$, on a les identités classiques :

$$\sum_{n \geq 1} u^n = \frac{u}{1-u}, \quad \sum_{n \geq 1} n u^n = \frac{u}{(1-u)^2}.$$

En posant $u = \frac{x}{4}$ (notant que $x \in [0, 4[$ donc $u < 1$), on a :

$$\sum_{n \geq 1} (n+1) \left(\frac{x}{4}\right)^n = \frac{\frac{x}{4}}{(1 - \frac{x}{4})^2} + \frac{\frac{x}{4}}{1 - \frac{x}{4}}.$$

Ainsi, on en déduit que

$$f(x) \leq \sqrt{\pi} \left[\frac{\frac{x}{4}}{(1 - \frac{x}{4})^2} + \frac{\frac{x}{4}}{1 - \frac{x}{4}} \right].$$

En réécrivant, on peut regrouper l'expression dans une forme exacte :

$$\boxed{\forall x \in [0, 4[, \quad \sqrt{\pi} \frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi} \left(\frac{x/4}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x} \right).}$$

Limites de f en 0^+ et 4^- :

En 0^+ : Lorsque $x \rightarrow 0^+$, les termes $\frac{x}{4-x}$, $\frac{x/4}{(1-x/4)^2}$ tendent vers 0. Ainsi, par théorème d'encadrement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

En 4^- : Dans l'inégalité inférieure,

$$f(x) \geq \sqrt{\pi} \frac{x}{4-x},$$

Or $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{4-x} = +\infty$, on a par comparaison,

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty.$$

16. Pour $x \geq 0$, chaque terme de la série définissant $f(x)$ est positif. En particulier, le premier terme (pour $n = 1$) est :

$$\frac{x^1}{\binom{2}{1}} = \frac{x}{2}.$$

D'où

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \geq \frac{x}{2}.$$

Ainsi, nous avons bien

$$f(x) \geq \frac{x}{2}.$$

17. On admet que :

$$f(x) = \frac{x}{2} + o(x).$$

En utilisant tous les résultats précédents, tracer l'allure précise de la courbe de la fonction f .

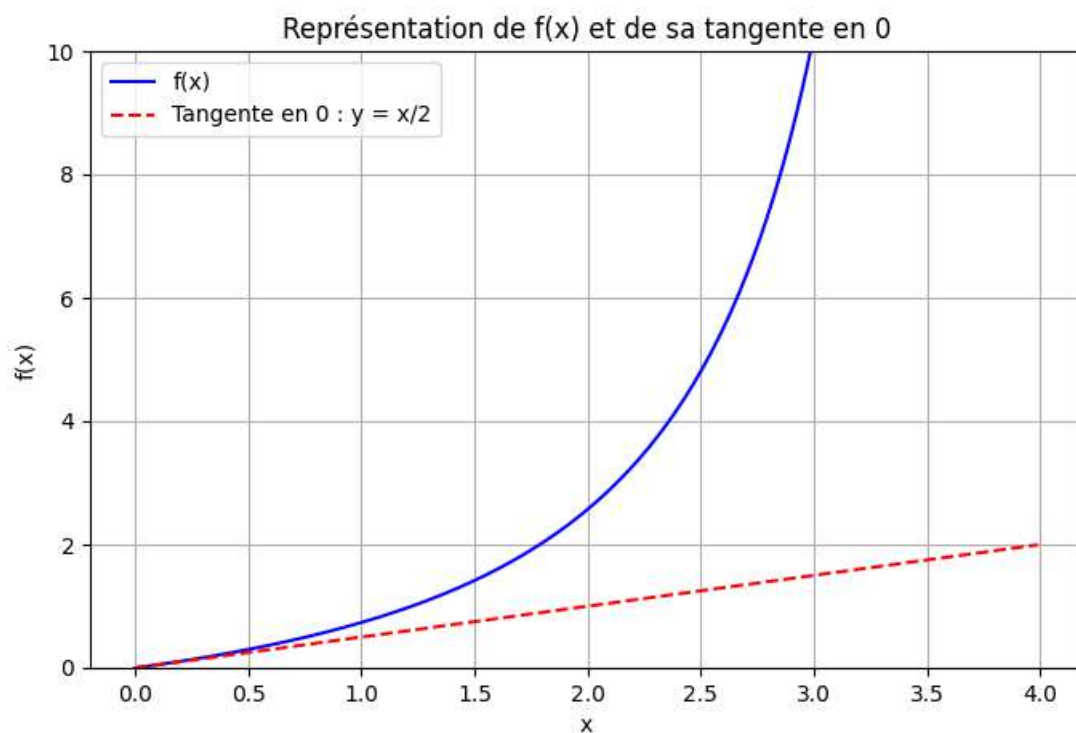


FIGURE 1 – Représentation graphique "zoomée"

