Corrigé du DS n° 5

Exercice 1 *ESCP 2020 voie T*

1. (a) Soit $t \in [1, x]$, on a
$$t \leqslant x \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{x}$$
Dès lors, puisque $\mathrm{e}^t \geqslant 0$, on a :
$$\frac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant \frac{\mathrm{e}^t}{x}$$
Et donc, par croissance de l'intégrale sur $[1, x]$ avec $1 \leqslant x$,
$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t \geqslant \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{x}\mathrm{d}t$$
Or,
$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t = f(x) \quad \text{et} \quad \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{x}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^t}{x}\right]_1^x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^1}{x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{x}$$
Ainsi, on a bien montré que $\boxed{f(x) \geqslant \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{x}}$.

(b) On remarque que :
$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{x} = \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}}{x}$$
Par croissance comparée, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{x} = +\infty$. Et donc, d'après le théorème de comparaison et en utilisant la question précédente, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

(c) La fonction f est égale à le primitive qui s'annule en 1 de la fonction continue $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{t}$. Donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction f est dérivable et sa dérivée est donnée par $\boxed{f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}}$.

(d) Pour étudier la convexité de f, calculons sa dérivée seconde. Pour cela, vérifions que f' est bien dérivable sur $[1, +\infty[$. Les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $t \mapsto t$ sont dérivables sur $[1, +\infty[$, de plus la fonction $t \mapsto t$ ne s'annule pas sur cet intervalle donc la fonction f' est dérivable sur $[1, +\infty[$.

Posons $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$. On a $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 1$. Ainsi,
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{x\mathrm{e}^x - 1\mathrm{e}^x}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2} \end{aligned}$$
Or, sur $[1, +\infty[$, $x - 1 \geqslant 0$. Par ailleurs, la fonction exponentielle et la fonction carrée sont toujours positives. Donc, $f''(x) \geqslant 0$ sur $[1, +\infty[$. Donc, f est $\boxed{\text{convexe sur } [1, +\infty[}$.

(e) L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est donnée par
$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

Or,
$$f(1)=\int_1^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t=0 \qquad \text{et} \qquad f'(1)=\frac{\mathrm{e}^1}{1}=e$$
Donc l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est donnée par $\boxed{y=\mathrm{e}(x-1)=\mathrm{e}x-\mathrm{e}}$.

2. (a) Les fonctions $t\mapsto \mathrm{e}^t$ et $t\mapsto t^3$ sont dérivables sur $[1,+\infty[$, de plus la fonction $t\mapsto t^3$ ne s'annule pas sur cet intervalle donc la fonction g est dérivable sur $[1,+\infty[$.
Calculons la dérivée g' de g. Posons $u(t)=\mathrm{e}^t$ et $v(t)=t^3$. On a $u'(t)=\mathrm{e}^t$ et $v'(t)=3t^2$. Alors,
$$\begin{aligned} g'(t)&=\frac{u'(t)v(t)-u(t)v'(t)}{(v(t))^2}\\ &=\frac{t^3\mathrm{e}^t-3t^2\mathrm{e}^t}{(t^3)^2}\\ &=\frac{t^2(t-3)\mathrm{e}^t}{t^6}\\ &=\frac{(t-3)\mathrm{e}^t}{t^4}\end{aligned}$$
On a $t-3\geqslant 0 \iff t\geqslant 3$. Par ailleurs, $\mathrm{e}^t\geqslant 0$ et $t^4\geqslant 0$.
Enfin, $g(1)=\dfrac{\mathrm{e}^1}{1^3}=\mathrm{e}$ et par croissance comparée $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^t}{t^3}=+\infty$. Et $g(3)=\dfrac{\mathrm{e}^3}{3^3}=\dfrac{\mathrm{e}^3}{27}$.
On en déduit le tableau de signes de g' et le tableau de variations de g :

t	1		3		$+\infty$
$t-3$		$-$	0	$+$	
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
g	e	$\searrow$	$\dfrac{e^3}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) D'après la question précédente, pour tout $t\in[1,3]$, on a
$$\frac{\mathrm{e}^3}{27}\leqslant g(t)\leqslant e$$
Or, $\dfrac{e^3}{27}\geqslant 0$, donc, pour tout $t\in[1,3]$,
$$0\leqslant g(t)\leqslant \mathrm{e}$$
Donc, par croissance de l'intégrale sur $[1,3]$,
$$0\leqslant \int_1^3 g(t)\mathrm{d}t\leqslant \int_1^3 \mathrm{e}\mathrm{d}t$$
Or, $\displaystyle\int_1^3 \mathrm{e}\mathrm{d}t=\mathrm{e}\int_1^3 1\mathrm{d}t=2\mathrm{e}$. Donc, $\boxed{0\leqslant \displaystyle\int_1^3 g(t)\mathrm{d}t\leqslant 2\mathrm{e}}$.

(c) Soit $x\geqslant 3$. La fonction g étant croissante sur l'intervalle $[3,x]$, on a pour tout $t\in[3,x]$,
$$0\leqslant \frac{\mathrm{e}^3}{27}\leqslant g(t)\leqslant g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}$$
Donc, par croissance de l'intégrale sur $[3,x]$ avec $x\geqslant 3$,
$$0\leqslant \int_3^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant \int_3^x \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}\mathrm{d}t$$

Or,

$$\int_3^x \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}\int_3^x 1\mathrm{d}t = \frac{x-3}{x^3}\mathrm{e}^x$$

Ainsi, on a bien $\boxed{0 \leqslant \int_3^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{x-3}{x^3}\mathrm{e}^x}$.

3. Effectuons une première intégration par parties. Posons $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = \frac{1}{t}$. Alors, $u(t) = \mathrm{e}^t$ et $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, x]$. Dès lors, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} f(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t &= \Big[u(t)v(t)\Big]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\mathrm{e}^t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^1}{1} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\mathrm{d}t$$

Utilisons de nouveau une intégration par parties pour calculer l'intégrale $\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\mathrm{d}t$.

Posons $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = \frac{1}{t^2}$. On a $u(t) = \mathrm{e}^t$ et $v'(t) = -\frac{2}{t^3}$. Alors, les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, x]$ et on a :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\mathrm{d}t &= \left[\frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{2\mathrm{e}^t}{t^3}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - \frac{\mathrm{e}^1}{1^2} + 2\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - \mathrm{e} + 2\int_1^x g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi, en réintégrant l'égalité obtenue ci-dessus, dans la formule établie précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - \mathrm{e} + 2\int_1^x g(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 2\mathrm{e} + 2\int_1^x g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à l'égalité demandée.

4. (a) Soit $x \in [3, +\infty[$. En utilisant l'égalité de la question précédente, ainsi que la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 2\mathrm{e} + 2\int_1^x g(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 2\mathrm{e} + 2\int_1^3 g(t)\mathrm{d}t + 2\int_3^x g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, d'après les questions **2(b)** et **2(c)**, on sait que $0 \leqslant \int_1^3 g(t)\mathrm{d}t \leqslant 2\mathrm{e}$ et $0 \leqslant \int_3^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{x-3}{x^3}\mathrm{e}^x$. Donc,

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 2\mathrm{e} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 2\mathrm{e} + 4\mathrm{e} + 2\frac{x-3}{x^3}\mathrm{e}^x$$

Soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{e}^x}{x}+\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}-2\mathrm{e}\leqslant f(x)\leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{x}+\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}+2\mathrm{e}+\frac{2x-6}{x^3}\mathrm{e}^x}$$

(b) Multiplions l'inégalité précédente par $x\mathrm{e}^{-x}$ (qui est positif sur $[3,+\infty[$). On obtient :

$$1+\frac{1}{x}-2\mathrm{e}x\mathrm{e}^{-x}\leqslant xf(x)\mathrm{e}^{-x}\leqslant 1+\frac{1}{x}+2\mathrm{e}x\mathrm{e}^{-x}+\frac{2x-6}{x^2}$$

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}-2\mathrm{e}x^{-x}=1$.
De plus, $\dfrac{2x-6}{x^2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{2}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$. En utilisant, le même résultat de croissance comparée que précédemment, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}+2\mathrm{e}x\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{2x-6}{x^2}=1$.
D'où d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\mathrm{e}^{-x}=1$ soit $\boxed{f(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}}$.

Exercice 2 *Adapté d'ECRICOME 2022 voie E*

1. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé. On appelle comme succès l'événement « le jeton est placé dans l'urne 0 (respectivement 1,2) », de probabilité $\dfrac{1}{3}$ car le choix d'urne est équiprobable. La variable aléatoire X_n (respectivement Y_n, Z_n) est alors égal au nombre de succès correspondant à une répétition de n épreuves de Bernoull identiques et indépendantes. On peut donc conclure que X_n, Y_n et Z_n suivent toutes trois une $\boxed{\text{loi binomiale } \mathcal{B}(n,\frac{1}{3})}$.

   (b) D'après le cours, $P\left(X_n=0\right)=\dbinom{n}{0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, et de même $P\left(X_n=n\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

   (c) C'est une égalité entre deux événements (= deux ensembles), donc il est préférable de rédiger par double inclusion.
   Si $[(Y_n=0)\cap(Z_n=0)]$ se réalise, alors après avoir placé les n premiers jetons, les urnes 1 et 2 n'en contiennent aucun : on a donc placé tous les jetons (au nombre de n) dans l'urne 0 , c'est à dire que $(X_n=n)$ se réalise.
   Réciproquement, si $X_n=n$, tous les jetons ont été placés dans l'urne 0 , donc les deux autres urnes sont vides : $Y_n=0$ et $Z_n=0$. On a bien l'égalité voulue.

   (d) L'événement V_n est réalisé si au moins une des trois urnes est vide après avoir placé n jetons autrement dit si U_0 ou U_1 ou U_2 est vide après avoir placé n jetons i.e. si $[X_n=0]$ ou $[Y_n=0]$ ou $[Z_n=0]$ est réalisé. On a donc $\boxed{V_n=[X_n=0]\cup[Y_n=0]\cup[Z_n=0]}$.

   (e) Par la formule du crible de Poincaré, on a

$$\begin{aligned}P\left(V_n\right)=&P\left(X_n=0\right)+P\left(Y_n=0\right)+P\left(Z_n=0\right)\\&-P\left([X_n=0]\cap[Y_n=0]\right)-P\left([Y_n=0]\cap[Z_n=0]\right)-P\left([Z_n=0]\cap[X_n=0]\right)\\&+P\left([X_n=0]\cap[Y_n=0]\cap[Z_n=0]\right).\end{aligned}$$

   Or les trois urnes ne peuvent pas être simultanément vides après avoir placé n jetons donc

$$P\left([X_n=0]\cap[Y_n=0]\cap[Z_n=0]\right)=0$$

   et d'après la question 1.(c) et en reproduisant le raisonnement, on a :

$$P\left([X_n=0]\cap[Y_n=0]\right)=P\left([Y_n=0]\cap[Z_n=0]\right)=P\left([Z_n=0]\cap[X_n=0]\right)=P\left(X_n=n\right).$$

   Enfin, en utilisant ce que l'on vient de montrer et la question 1.(b), on obtient :

$$P\left(V_n\right)=3\left(\frac{2}{3}\right)^n-3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

2. L'événement V est réalisé si pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel qu'après n jetons placés, une des trois urnes reste toujours vide soit si l'événement V_n est réalisé. Ainsi on peut écrire que $V=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} V_n$.
   Or la suite d'événements (V_n) est décroissante au sens de l'inclusion : $V_{n+1}\subset V_n$. En effet, si au moins une des urnes est

vide après les $n+1$ premiers jetons, elle l'était nécessairement après n'avoir placé que les n premiers.
Ainsi d'après le théorème de la limite monotone, on a

$$P(V) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(V_n) = \lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad \text{car } \frac{2}{3} \in]-1,1[,\ \frac{1}{3} \in]-1,1[.$$

donc $P(V) = 0$ et cet événement est $\boxed{\text{négligeable}}$.

3. (a) On va continuer à ajouter des jetons tant qu'il y a au moins un zéro dans le vecteur correspondant au nombre de jetons par urne. Pour cela on cherche si il reste des composantes de L égales à 0 , puisque le vecteur L va stocker dans chacune de ses cases le nombre de jetons placés dans l'urne correspondante au numéro de la case de L.

```
def T():
    n=0
    L=np.zeros(3)
    while L[0]*L[1]*L[2]==0
        i=rd.randint(0,3)  \# on choisit une urne au hasard (donc un entier entre 0 et 2)
        L[i]=L[i]+1  \# urne i a un jeton
        n=n+1
    return n
```

(b) On peut obtenir une valeur approchée de l'espérance d'une variable (quand celle-ci existe) à l'aide de la moyenne empirique d'un n échantillon de cette variable, avec n aussi grand que possible. Ici, le sujet propose $n = 10000$

```
S=0
for k in range(10000):
    S=S+T()
print(S/10000)
```

4. Il faut placer au minimum 3 jetons si on veut espérer remplir les 3 urnes, mais on peut attendre arbitrairement longtemps, en remplissant successivement les mêmes urnes. On a donc $\boxed{T(\Omega) = [\![3, +\infty[\![}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$. Observons que

$$[T = n] \cup V_n = V_{n-1}.$$

En effet, si au moins une urne est vide après $n-1$ jetons placés, il y a deux situations (incompatibles) : ou bien il reste encore au moins une urne vide après le n-ième jeton (c'est à dire V_n) ou bien, on remplit toutes les urnes pour la première fois avec le n-ième jeton (c'est à dire $[T = n]$).
L'incompatibilité de ces deux événements donne

$$P(T = n) + P(V_n) = P(V_{n-1}) \iff P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n).$$

6. (a) Posons pour un entier $k \geqslant 3$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n}\left(k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right)$. En utilisant la linéarité de la somme, on obtient :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=3}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\sum_{k=3}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 1 - 2\times\frac{2}{3} - 2\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + 2\times 1 + 2\times 2\times\frac{1}{3} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + 1
\end{aligned}$$

On reconnaît les sommes partielles de la série géométrique dérivée première pour des raisons valant $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$. Ces deux raisons sont comprises entre -1 et 1 donc les sommes partielles convergent et par suite (S_n) converge. En conclusion, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\left(n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$ est $\boxed{\text{convergente}}$. On est alors en mesure de calculer sa somme :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\left(n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} - 2\times\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + 1 = \frac{11}{2}.$$

(b) D'après les questions précédentes, on a, pour $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} P(T=n) &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\ &= 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(1-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}-1\right)\right] \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Puis pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

On reconnaît le terme général de la série étudiée à la question précédente. On sait donc qu'elle converge donc $\boxed{T \text{ admet une espérance et } E(T) = \dfrac{11}{2}}$.

Exercice 3

1. Nous remarquons déjà que g est définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel de référence. Par ailleurs, soit $((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \lambda) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2 \times \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g\left(\lambda\left(x_1, y_1, z_1\right), +\left(x_2, y_2, z_2\right)\right) &= g\left(\left(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2\right)\right) \\ &= \left(3\left(\lambda x_1 + x_2\right) + \lambda y_1 + y_2 - \lambda\left(z_1 + z_2\right), 2\left(\lambda x_1 + x_2\right) + 4\left(y_1 + y_2\right) - 2\left(\lambda z_1 + z_2\right), \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2\right) \\ &= \lambda\left(3x_1 + y_1 - z_1, 2x_1 + 4y_1 - 2z_1, x_1 + y_1 + z_1\right) + \left(3x_2 + y_2 - z_2, 2x_2 + 4y_2 - 2z_2, x_2 + y_2 + z_2\right) \\ &= \lambda g\left(x_1, y_1, z_1\right) + g\left(x_2, y_2, z_2\right). \end{aligned}$$

   Donc g est linéaire. En conclusion, g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(g) &\iff g((x,y,z)) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad 2y - 4z = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ -2y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad 2y - 4z = 0 \\ \qquad -7z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z = 0 \end{aligned}$$

   Conclusion : $\mathrm{Ker}(g) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
3. D'après la question précédente, on en déduit que g est injectif, comme g est un endomorphisme cela équivaut à g bijectif.
4. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} g^2((x,y,z)) &= g((3x + y - z, 2x + 4y - 2z, x + y + z)) \\ &= (3(3x + y - z) + (2x + 4y - 2z) - (x + y + z), 2(3x + y - z) + 4(2x + 4y - 2z) - 2(x + y + z), 3x + y - z, 2x + 4y - 2z + x + y + z) \\ &= (10x + 6y - 6z, 12x + 16y - 12z, 6x + 6y - 2z). \end{aligned}$$

   De même :

$$-6g((x,y,z)) = -(18x + 6y - 6z, 12x + 24y - 12z, 6x + 6y + 6z)$$

et :

$$8\mathrm{Id}_{\mathrm{R}^3}((x,y,z)) = (8x, 8y, 8z)$$

Ainsi,

$$\left(g^2 - 6g + 8\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)((x,y,z)) = (0,0,0)$$

On a bien : $g^2 - 6g + 8\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Par linéarité de g, on peut donc écrire que :

$$g \circ \left(\frac{1}{-8}\left(g - 6\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)\right) = \left(\frac{1}{-8}\left(g - 6\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)\right) \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$$

Ainsi, $g^{-1} = \dfrac{-1}{8}\left(g - 6\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$.

5. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in F &\iff g((x,y,z)) = 4(x,y,z) \\
&\iff \begin{cases} 3x + y - z = 4x \\ 2x + 4y - 2z = 4y \\ x + y + z = 4z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = y - z = 2z - z = z \\ y = 2z \end{cases} \\
&\iff (x,y,z) = z(1,2,1) \\
&\iff (x,y,z) \in \mathrm{Vect}((1,2,1))
\end{aligned}$$

Donc $F = \mathrm{Vect}((1,2,1))$. Ainsi, $((1,2,1))$ est une famille génératrice de F. Comme est constituée d'un unique vecteur non nul, elle est également libre.
Conclusion : $((1,2,1))$ est une base de F.

6. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in G &\iff g((x,y,z)) = 4(x,y,z) \\
&\iff \begin{cases} 3x + y - z = 2x \\ 2x + 4y - 2z = 2y \\ x + y + z = 2z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \\
&\iff z = x + y \\
&\iff (x,y,z) = x(1,0,1) + y(0,1,1) \\
&\iff (x,y,z) \in \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1))
\end{aligned}$$

Donc $G = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$. Ainsi, $((1,0,1),(0,1,1))$ est une famille génératrice de G. Comme elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires, elle est également libre.
Conclusion : $((1,0,1),(0,1,1))$ est une base de G.

7. On montre que la famille $((1,0,1),(0,1,1),(1,2,1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ (à écrire en posant λ_1, λ_2, λ_3 ...) Comme est elle constituée de 3 vecteurs et que $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$, elle forme une base de $\mathbb{R}^3$.
Conclusion : D'après le théorème de concaténation des bases, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

8. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe $(a,b) \in \mathrm{Ker}(h_1) \times \mathrm{Ker}(h_2)$ tel que $x = a+b$. On a alors $f(x) = f(a)+f(b)$ par linéarité de f. Mais comme $a \in \mathrm{Ker}(h_1)$, on a $f(a) = 2a$ et comme $b \in \mathrm{Ker}(h_2)$, on a $f(b) = 4b$. Ainsi, on a :

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} x & = a+b \\ f(x) & = 2a+4b \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{rl} b & = \dfrac{f(x)}{2} - x \\ a & = 2x - \dfrac{f(x)}{2} \end{array}\right.$$

A ce stade, on a démontré que si une décomposition existe alors elle est unique et il s'agit de

$$x = \left(2x - \frac{f(x)}{2}\right) + \left(\frac{f(x)}{2} - x\right).$$

Synthèse Soit $x \in E$. On pose $a = 2x - \dfrac{f(x)}{2}$ et $b = \dfrac{f(x)}{2} - x$. Il vient :

- $a+b = 2x - \dfrac{f(x)}{2} + \dfrac{f(x)}{2} - x = x$
- $f(a) = f\left(2x - \dfrac{f(x)}{2}\right) = 2f(x) - \dfrac{1}{2}f^2(x) = 2f(x) - \dfrac{1}{2}(6f - 8\mathrm{Id}_E) = 2f(x) - 3f(x) + 4x = -f(x) + 4x = 2\left(2x - \dfrac{f(x)}{2}\right) = 2a$ donc $a \in \mathrm{Ker}(h_1)$.
- Avec le même raisonnement $f(b) = 4b$ donc $b \in \mathrm{Ker}(h_2)$.

Ainsi, nous avions bien trouvé une décomposition valide. Donc, il existe une unique décomposition de chaque vecteur x de E comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(h_1)$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(h_2)$.

Conclusion : $\mathrm{Ker}(h_1)$ et $\mathrm{Ker}(h_2)$ sont supplémentaires dans E.

9. D'après la question précédente p est l'application linéaire définie sur E telle que pour tout $x \in E$, $p(x) = \dfrac{f(x)}{2} - x$.

Problème 1

1. On pouvait proposer la fonction suivante :

```python
import numpy as np

def s1(n):
    a=0
    S=np.zeros(n)
    for i in range(1,n+1):
        a=a+1/i**2
        S[i-1]=a
    return S
```

2. On peut conjecturer que $\sqrt{6s_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi$ et donc que $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{6}$.

Partie I - Convergence des quatre suites

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0.$$

La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{croissante}}$.

(b) Soit $k \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[k-1,k]$ donc pour tout $t \in [k-1,k]$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.
Or $k-1 \leqslant k$ donc par croissance de l'intégrale on a :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}(k-(k-1)) = \frac{1}{k^2}$. On a donc $\boxed{\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant la relation précédente terme à terme pour k variant de 2 à n, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d} = \int_{1}^{n} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or,

$$\int_{1}^{n} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Ainsi, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$$

Il reste à ajouter 1 de chaque côté de l'inégalité pour faire apparaître s_n à gauche de l'inégalité. On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{s_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}}$.

(d) D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$ (car $-\frac{1}{n} \leqslant 0$). Ainsi la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 2 donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle $\boxed{\text{converge}}$. On note S sa limite. La suite (s_n) $\boxed{\text{converge vers } S}$.

(e) On vient de redémontrer que la série de Riemann pour $\alpha = 2$ est convergente. On le savais déjà puisque $\alpha = 2 > 1$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}s_n.$$

On a donc montré que $\boxed{u_n = \frac{1}{4}s_n}$. Puis, soit $n \in \mathbb{N}^*$, en séparant les termes pairs et impairs, on obtient :

$$s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Donc $s_{2n+1} = u_n + v_n$ soit $\boxed{v_n = s_{2n+1} - u_n}$. Puis, soit $n \in \mathbb{N}^*$, en séparant de nouveau les termes pairs et impairs, on obtient :

$$w_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2p+2}}{(2p+1)^2} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

soit $\boxed{w_{2n} = -u_n + v_{n-1}}$. De même, soit $n \in \mathbb{N}^*$, en séparant de nouveau les termes pairs et impairs, on obtient :

$$w_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{2p+2}}{(2p+1)^2} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

soit $\boxed{w_{2n+1} = -u_n + v_n}$.

(b)
- D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \frac{1}{4}s_n$. Or, d'après la question 2.(d), la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers S. Par opérations sur les limites, la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } U = \frac{1}{4}S}$.
- Puis d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n = s_{2n+1} - u_n$. Or, nous venons de montrer que la suite (u_n) converge vers $U = \frac{1}{4}S$. De plus, comme (s_n) converge vers S, toute suite extraite de (s_n) converge aussi vers S. Ainsi la suite $(s_{2n+1})_n$ converge vers S.

  On conclut par opérations sur les limites que $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } V = S - \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S}$.

- Enfin d'après la question précédente $w_{2n} = -u_n + v_{n-1}$ et $w_{2n+1} = -u_n + v_n$. Puisque $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent, le théorème d'opérations sur les limites permet d'affirmer que $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}*}$ convergent toutes les deux vers $V - U = \frac{1}{2}S$.

  D'après le théorème des deux suites extraites, $\boxed{(w_n)_n \text{ converge et } W = \frac{1}{2}S}$.

Partie II - Calcul des limites des quatre suites

5. (a) i. On a $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ d'où :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b).$$

ii. On a : $\sin(a) = \sin(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}) = \sin(\frac{a}{2})\cos(\frac{a}{2}) + \cos(\frac{a}{2})\sin(\frac{a}{2}) = 2\sin(\frac{a}{2})\cos(\frac{a}{2})$.

iii. On a : $\cos(a) = \cos(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}) = \cos^2(\frac{a}{2}) - \sin^2(\frac{a}{2}) = \cos^2(\frac{a}{2}) - (1 - \cos^2(\frac{a}{2})) = 2\cos^2(\frac{a}{2}) - 1$ donc :

$$\cos^2(\frac{a}{2}) = \frac{1 + \cos(a)}{2}.$$

(b) Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ non multiple de 2π, $\mathcal{P}(n)$: « $D_n(x) = \dfrac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}$ »

Initialisation $(n = 1)$ On a d'une part : $D_1(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$ et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}} &= \frac{\sin(x)\cos(\frac{x}{2}) + \cos(x)\sin(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} \\
&= \frac{\cos(x)}{2} + \frac{\sin(x)\cos(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} \\
&= \frac{\cos(x)}{2} + \frac{2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} \\
&= \frac{\cos(x)}{2} + \cos^2(\frac{x}{2}) \\
&= \frac{\cos(x)}{2} + \frac{1 + \cos(x)}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \cos(x)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
D_{n+1}(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n+1}\cos(kx) \\
&= D_n(x) + \cos((n+1)x) \\
&= \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}} + \cos((n+1)x) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] + 2\cos((n+1)x)\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] + \sin[\frac{x}{2} + (n+1)x] + \sin[\frac{x}{2} - (n+1)x]}{2\sin\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\left[\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)x\right] + \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] - \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\left[\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

6. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $u : x \mapsto \dfrac{1}{k}\sin(kx)$ et $v : x \mapsto x$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ avec $u' : x \mapsto \cos(kx)$ et $v' : x \mapsto 1$. Donc, par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\cos(kx)\mathrm{d}x &= \left[x\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{k}\sin(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{k}\sin(k\pi) - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kx)\mathrm{d}x \qquad \text{or } \sin(k\pi)=0 \\
&= \frac{1}{k^2}[\cos(kx)]_0^\pi \\
&= \frac{(-1)^k-1}{k^2}.
\end{aligned}$$

donc Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi x\cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k-1}{k^2}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
L_n &= \int_0^\pi x\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n \cos(kx)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi x\cos(kx)\mathrm{d}x \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^\pi + \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^k-1}{k^2}\right) \qquad \text{d'après la question précédente} \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}
\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\displaystyle L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}}$.

7. (a) La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est continue sur $]0,\pi]$ et ne s'annule pas sur cet intervalle donc la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est continue sur $]0,\pi]$.
Il nous faut donc étudier la continuité de la fonction f en 0.
On a

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2} \quad \text{donc} \quad f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{\frac{x}{2}} = 2.$$

On a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$. On doit donc choisir $\boxed{a=2}$ pour que la fonction f soit continue sur $[0,\pi]$.

(b) La fonction f est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Et, pour tout $x \in]0,\pi]$,

$$f'(x) = \frac{\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\times x \times \cos\frac{x}{2}}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

8. Soit $\lambda > 0$. On pose $u : x \mapsto \phi(x)$ et $v : x \mapsto -\dfrac{\cos(\lambda x)}{\lambda}$, les fonctions u et v sont des classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ donc, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\phi(x)\cos(\lambda x)}{\lambda}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \phi'(x)\frac{-\cos\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\phi(0)}{\lambda} - \frac{\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda} + \int_0^\pi \phi'(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

L'idée est, ensuite, de majorer $\left|\displaystyle\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x\right|$ par un terme qui tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$. On a d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|-\frac{\pi(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{\phi(0)}{\lambda}\right| + \left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \phi'(x)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x\right|$$

Occupons-nous chacun des deux termes :

$$\left|\frac{1}{\lambda}(\phi(0)-\phi(\pi)\cos(\lambda\pi))\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}(|\phi(0)|+|\phi(\pi)|)$$

donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left|\frac{\phi(0)}{\lambda}-\frac{\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda}\right| = 0$. Par ailleurs, toujours d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^\pi \phi'(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |\phi'(x)|\times|\cos\lambda x|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |\phi'(x)|\mathrm{d}x \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left|\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x\right| = 0.$$

On en déduit donc que $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x = 0}$.

9. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, en utilisant l'expression admise pour D_n, on a :

$$\begin{aligned}
L_n &= \int_0^\pi xD_n(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi x\times\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\times\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi f(x)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Or la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ d'après la question 6.(b) et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2} = +\infty$.
D'après la question précédente, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0}$.

(b) En passant à la limite dans la relation de la question 5.(b). (ce qui est licite car nous avons bien précédemment démontré chaque terme convergeait), on obtient

$$0 = \frac{\pi^2}{4} - S - W.$$

Mais, on a montré à la fin de la Partie I que $W = \frac{1}{2}S$. Ainsi

$$\frac{3}{2}S = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{et} \quad S = \frac{\pi^2}{6}.$$

De plus, $U = \frac{1}{4}S$ donc $U = \frac{\pi^2}{24}$, $W = \frac{1}{2}S$ donc $W = \frac{\pi^2}{12}$ et $V = \frac{3}{4}S$ donc $V = \frac{\pi^2}{8}$.

Conclusion : $\boxed{S = \frac{\pi^2}{6},\quad U = \frac{\pi^2}{24},\quad V = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } W = \frac{\pi^2}{12}}$.

(c) On a montré que la somme de la série de Riemann pour $\alpha = 2$ vaut $\frac{\pi^2}{6}$ soit

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Remarque : c'est plutôt cool, non ?