Corrigé du DS n° 5

Exercice 1

1. Avec le système complet d'événements (R_0, V_0, J_0), et en appliquant la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(R_1) &= P(R_0 \cap R_1) + P(V_0 \cap R_1) + P(J_0 \cap R_1) \\ &= P(R_0) P_{R_0}(R_1) + P(V_0) P_{V_0}(R_1) + P(J_0) P_{J_0}(R_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage est $\boxed{P(R_1) = \frac{2}{5}}$.

De même, on obtient pour $P(V_1)$:

$$\begin{aligned} P(V_1) &= P(R_0) P_{R_0}(V_1) + P(V_0) P_{V_0}(V_1) + P(J_0) P_{J_0}(V_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité de tirer une boule verte au premier tirage est $\boxed{P(V_1) = \frac{1}{3}}$.

Comme (R_1, V_1, J_1) est un système complet d'événements, on a :

$$P(J_1) = 1 - P(R_1) - P(V_1) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{15 - 6 - 5}{15} = \frac{4}{15}$$

Ainsi, la probabilité de tirer une boule jaune au premier tirage est $\boxed{P(J_1) = \frac{4}{15}}$.

2. On cherche $P(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$. Avec la formule des probabilités composées :

$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) \times P_{V_1 \cap V_2}(V_3) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{75}$$

Ainsi, la probabilité que les trois premières boules tirées soient vertes vaut $\boxed{\frac{4}{75}}$.

3. (a) Comme (R_n, V_n, J_n) est un système complet d'événements, on a :

$$r_n + v_n + j_n = P(R_n) + P(V_n) + P(J_n) = 1.$$

Ainsi $\boxed{r_n + v_n + j_n = 1}$.

(b) On considère le système complet d'événements (R_n, V_n, J_n). Alors, en appliquant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{aligned} r_{n+1} = P(R_{n+1}) &= P(R_n \cap R_{n+1}) + P(V_n \cap R_{n+1}) + P(J_n \cap R_{n+1}) \\ &= P(R_n) P_{R_n}(R_{n+1}) + P(V_n) P_{V_n}(R_{n+1}) + P(J_n) P_{J_n}(R_{n+1}) \\ &= r_n \times \frac{3}{5} + v_n \times \frac{2}{5} + j_n \times \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, on a $j_n = 1 - r_n - v_n$, on en déduit que :

$$r_n = \frac{3}{5} r_n + \frac{2}{5} v_n + \frac{1}{5}(1 - r_n - v_n) = \frac{2}{5} r_n + \frac{1}{5} v_n + \frac{1}{5}.$$

Ainsi $\boxed{r_{n+1} = \frac{2}{5}r_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{1}{5}}$.

Pour v_{n+1}, on a de la même façon,

$$\begin{aligned} v_{n+1} = P(V_{n+1}) &= P(R_n)\,P_{R_n}(V_{n+1}) + P(V_n)\,P_{V_n}(V_{n+1}) + P(J_n)\,P_{J_n}(V_{n+1}) \\ &= r_n \times \frac{1}{5} + v_n \times \frac{2}{5} + j_n \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{5}(1 - r_n - v_n) \\ &= -\frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{v_{n+1} = -\frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}}$.

Nous sommes alors en mesure d'exprimer r_{n+2}. En utilisant, l'expression de r_{n+1}, on obtient :

$$r_{n+2} = \frac{2}{5}r_{n+1} + \frac{1}{5}v_{n+1} + \frac{1}{5}$$

Il reste alors à remplacer v_{n+1} par son expression, on a :

$$r_{n+2} = \frac{2}{5}r_{n+1} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}r_{n+1} - \frac{1}{25}r_n + \frac{7}{25}.$$

En résumé, on a obtenu que $\boxed{r_{n+2} = \frac{2}{5}r_{n+1} - \frac{1}{25}r_n + \frac{7}{25}}$.

(c) Pour tout $n \geqslant 1$, on a $r_n = u_n + \frac{7}{16}$. Alors, avec la relation précédente,

$$\begin{aligned} r_{n+2} = \frac{2}{5}r_{n+1} - \frac{1}{25}r_n + \frac{7}{25} &\Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{7}{16} = \frac{2}{5}\left(u_{n+1} + \frac{7}{16}\right) - \frac{1}{25}\left(u_n + \frac{7}{16}\right) + \frac{7}{25} \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{7}{16} = \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{14}{80} - \frac{1}{25}u_n - \frac{7}{400} + \frac{7}{25} \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{7}{16} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n + \frac{70 - 7 + 112}{400} \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{7}{16} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n + \frac{175}{400} \\ &\Leftrightarrow u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \end{aligned}$$

$$\text{car } \frac{175}{400} = \frac{7 \times 25}{16 \times 25} = \frac{7}{16}$$

Ainsi, (u_n) est une $\boxed{\text{suite récurrente linéaire d'ordre 2}}$.

(d) L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est $x^2 = \frac{2}{5}x - \frac{1}{25}$ donc $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = 0$.
Il y a donc une racine double $x_0 = \frac{1}{5}$. Ainsi il existe λ et μ tels que :

$$\forall n \geqslant 1, u_n = (\lambda n + \mu)\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Or $u_1 = r_1 - \frac{7}{16} = \frac{2}{5} - \frac{7}{16} = \frac{32 - 35}{80} = -\frac{3}{80}$ (en utilisant la question 1.).

Et $u_2 = r_2 - \frac{7}{16} = \frac{32}{75} - \frac{7}{16} = \frac{16 \times 32 - 7 \times 75}{1200} = \frac{512 - 525}{1200} = -\frac{13}{1200}$ (en utilisant la question 2.). On a donc :

$$\begin{cases} u_1 = -\dfrac{3}{80} = (\lambda \times 1 + \mu) \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^1 \\ u_2 = -\dfrac{13}{1200} = (\lambda \times 2 + \mu) \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = -\dfrac{3}{16} = -\dfrac{9}{48} \\ 2\lambda + \mu = -\dfrac{13}{48} \end{cases}$$

En faisant $L_2 - L_1$, on obtient : $\lambda = \dfrac{-13+9}{48} = \dfrac{-4}{48}$.

Avec L_1, on a donc : $\mu = \dfrac{-9+4}{48} = \dfrac{-5}{48}$.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n = \dfrac{-4n-5}{48}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$.

On en déduit alors l'expression de r_n. Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{r_n = \dfrac{-4n-5}{48}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + \dfrac{7}{16}}$.

4. **Python**

(a)
```
def ChoixUrne():
    if np.rand()< 1/3 :
        y=1
    elif 1/3<np.rand()<2/3 :
        y=2
    else :
        y=3
    return y
```

(b)
```
def urneRouge():
    if np.rand()<3/5 :
        y=1
    elif 3/5<np.rand()<4/5 :
        y=2
    else :
        y=3
    return y
```

(c)
```
def urneVerte():
    if np.rand()<2/5 :
        y=1
    elif 2/5<np.rand()<4/5 :
        y=2
    else :
        y=3
    return y
```

(d)
```
def urneJaune():
    if np.rand()<1/5 :
        y=1
    elif 1/5<np.rand()<3/5 :
        y=2
    else :
        y=3
    return y
```

(e)
```
def Simu(n):
    y=ChoixUrne()
    for k in range(n):
        if y==1 :
            y=urneRouge()
        elif y==2 :
            y=urneVerte()
        else :
            y=urneJaune()
    return y
```

Exercice 2

1. La fonction $x \mapsto 1+x$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$. La fonction $\ln$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ donc par composition, la fonction f est $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-1,+\infty[}$.
   Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété

   $$\mathcal{P}(n) : \text{« } \forall x \in]-1,+\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \text{ »}$$

   est vraie.
   Initialisation Pour $n=1$ et $x \in]-1,+\infty[$ on a $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $\frac{(-1)^0 0!}{(1+x)} = \frac{1}{1+x}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors, $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. On a, pour $x \in]-1,+\infty[$, $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient donc

   $$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(-n)}{(1+x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}}$.

2. (a) Soit $x \in [0,1]$ et soit $t \in [0,x]$. On a alors

   $$\left|f^{(n+1)}(t)\right| = \left|\frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}\right| = \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leqslant n! \quad \text{car } t \geqslant 0 \text{ et donc } \frac{1}{(1+t)^{n+1}} \leqslant 1.$$

   En conclusion, $n!$ est un $\boxed{\text{majorant de } \left|f^{(n+1)}\right| \text{ sur } [0,x]}$.

   (b) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. On peut donc lui appliquer l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre n. Grâce à la question précédente, on obtient

   $$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{n! x^{n+1}}{(n+1)!}$$

   Or, $f(0)=0$ et pour tout $k \geqslant 1$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)\,!$ d'après la question 1. Donc,

   $$\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

   et en reportant dans l'inégalité précédente, on obtient,

   $$\forall x \geqslant 0, \quad \left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

3. (a) Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Soit $t \in [x,0]$. On a alors

   $$\left|f^{(n+1)}(t)\right| = \left|\frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}\right| = \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leqslant \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \quad \text{car } t \geqslant x$$

   En conclusion, $\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$ est un $\boxed{\text{majorant de } \left|f^{(n+1)}\right| \text{ sur } [x,0]}$.

   (b) On reprend le raisonnement de la question 3.(b) en changeant le majorant de $\left|f^{n+1}\right|$. On obtient

   $$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leqslant \frac{n!|x|^{n+1}}{(n+1)!(1+x)^{n+1}} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}$$

   On obtient donc :

   $$\forall x \geqslant 0, \quad \left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}.$$

4. Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Raisonnons par disjonction des cas.

- Si $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, alors l'inégalité de la question 3(b) est valable. Comme $x \geqslant -1/2$, on a $-x \leqslant 1+x$ et donc

$$\left(\frac{|x|}{1+x}\right)^{n+1} = \left(\frac{-x}{1+x}\right)^{n+1} \leqslant 1.$$

Il vient alors que

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et par le théorème d'encadrement, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(1+x).$$

- Sinon, $x \in]0,1]$ et c'est l'inégalité de la question 2(b) qui est valable. Comme $0 < x \leqslant 1$, on a $x^{n+1} \leqslant 1$ et donc

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Le théorème d'encadrement permet également de conclure.

En conclusion, on a bien montré que pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(1+x).$$

5. **Python**

```python
def f(x):
    y=np.log(x+1)
    return y
```

Exercice 3

1. **Un exemple -**

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $X' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
f(\lambda X + X') &= f(\lambda(x,y,z) + (x',y',z')) \\
&= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\
&= (\lambda x + x' + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z'), \lambda x + x' + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z'), \lambda x + x' + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z')) \\
&= (\lambda(x+y-2z) + x' + y' - 2z', \lambda(x+y-2z) + x' + y' - 2z', \lambda(x+y-2z) + x' + y' - 2z') \\
&= \lambda f(x,y,z) + f(x',y',z')
\end{aligned}$$

L'application f est donc bien $\boxed{\text{linéaire}}$.

(b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
f \circ f(x,y,z) &= f(f(x,y,z)) \\
&= f(x+y-2z, x+y-2z, x+y-2z) \\
&= (x+y-2z+x+y-2z-2(x+y-2z), *, *) \\
&= (0,0,0).
\end{aligned}$$

Cela signifie que $f \circ f$ est $\boxed{\text{l'endomorphisme nul de } \mathbb{R}^3}$.

(c) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) \iff x+y-2z = 0 \iff x = -y+2z$. Ainsi on trouve

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{(-y+2z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \operatorname{Vect}((-1,1,0),(2,0,1)).$$

La famille $(-1,1,0),(2,0,1)$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ par définition et libre car composée de deux vecteurs non-colinéaires. Ainsi c'est une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Ker}(f)}$.
Comme la famille $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1))\\ &= \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,1,1),(-2,-2,-2))\\ &= \mathrm{Vect}((1,1,1)).\end{aligned}$$

La famille $((1,1,1))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ par définition et libre car composée d'un seul vecteur, qui est non-nul. Donc c'est une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Im}(f)}$.

(d) On a $(1,1,1) = (-1,1,0)+(2,0,1)$. Ainsi $(1,1,1) \in \mathrm{Ker}(f)$ et donc $\mathrm{Vect}(1,1,1) \subset \mathrm{Ker}(f)$ car le noyau est un espace vectoriel. On a bien : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Remarque : On aurait aussi pu calculer $f(1,1,1)$ et vérifier que cela faisait bien $0_{\mathbb{R}^3}$ pour montrer que $(1,1,1) \in \mathrm{Ker}(f)$.

(e) D'après la question 1.(c), on voit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. De plus la famille $((3,2,1))$ est génératrice de $\mathrm{Vect}((3,2,1))$ et libre car composée d'un unique vecteur, qui est non-nul. Donc cette famille est une base de $\mathrm{Vect}((3,2,1))$. Ainsi $\dim(\mathrm{Vect}((3,2,1))) = 1$. On obtient donc

$$\dim(\mathrm{Vect}((3,2,1))) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1+2 = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$$

Soit $u \in \mathrm{Vect}((3,2,1)) \cap \mathrm{Ker}(f)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(3,2,1) = (3\lambda, 2\lambda, \lambda)$. De plus, $u \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ soit $f(3\lambda,2\lambda,\lambda) = (0,0,0)$ i.e. $(3\lambda+2\lambda-2\lambda, 3\lambda+2\lambda-2\lambda, 3\lambda+2\lambda-2\lambda) = (0,0,0)$. On en déduit que $3\lambda = 0$ puis que $u = (0,0,0)$. Ainsi on a montré que

$$\mathrm{Vect}((3,2,1)) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$$

Ainsi on a bien $\boxed{\mathrm{Vect}((3,2,1)) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3}$

2. **Un premier résultat -**

(a) Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$. Ainsi

$$f(x) = f(f(a)) = f \circ f(a) = \theta(a) = 0_E.$$

Donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a ainsi montré que $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)}$.

(b) Comme f n'est pas l'endomorphisme nul, on a $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$ et donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant 1$. De plus d'après ce qui précède et le théorème du rang

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\ker(f)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(f)) \quad \text{i.e.} \quad 2\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 3.$$

On en déduit que

$$1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \frac{3}{2}$$

Ainsi on a bien $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1}$.

(c) Comme $x \in \mathrm{Im}(f)$ on en déduit que $\mathrm{Vect}(x) \subset \mathrm{Im}(f)$ (car $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel). De plus, comme x est un vecteur non-nul, on a $\dim(\mathrm{Vect}(x)) = 1 = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Vect}(x) = \mathrm{Im}(f).}$

(d) Comme $f(a) \neq 0_E$ alors $a \neq 0_E$ et donc $\dim(\mathrm{Vect}(a)) = 1$. De plus d'après le théorème du rang

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 2 = 1.$$

Ainsi on en déduit que

$$\dim(\mathrm{Vect}(a)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim(E)$$

Soit $y \in \mathrm{Vect}(a) \cap \mathrm{Ker}(f)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda a$. De plus, $y \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(y) = 0_E$. Or $f(y) = f(\lambda a) = \lambda f(a) = \lambda x$. On en déduit que $\lambda x = 0_E$. Comme $x \neq 0_E$ alors $\lambda = 0$ et donc $y = 0_E$. On a ainsi montré que

$$\mathrm{Vect}(a) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$

On a donc bien $\boxed{\mathrm{Vect}(a) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E}$.

3. **Un deuxième résultat -**

(a) Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente on a $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant 1$. Ainsi d'après ce qui précède et le théorème du rang

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(f))$$

On en déduit que

$$1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 2 \text{ i.e. } \quad \dim(\mathrm{Im}(f)) \in \{1, 2\}.$$

(b) On a toujours $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Par ailleurs, d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - 2 = 2 = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Ainsi on a montré que $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)}$.

(c) Montrons que la famille (a_1, a_2, x_1, x_2) est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0_E.$$

En appliquant f on obtient

$$\begin{aligned} f(0_E) &= f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) \\ &= \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \mu_1 f(x_1) + \mu_2 f(x_2) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \mu_1 f(f(a_1)) + \mu_2 f(f(a_2)) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \end{aligned}$$

On obtient donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0_E$. Comme la famille (x_1, x_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$, elle est libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. En injectant cela dans $(\star)$, on obtient $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0_E$, ce qui nous donne pour les mêmes raisons que précédemment $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Ainsi la famille (a_1, a_2, x_1, x_2) est libre. De plus elle a $4 = \dim(E)$ éléments. C'est donc une $\boxed{\text{base de } E}$.

(d) Comme la famille (a_1, a_2) est une sous-famille de (a_1, a_2, x_1, x_2), elle est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Vect}(a_1, a_2)$. De plus (x_1, x_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$. Donc (x_1, x_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$. En concaténant ces deux bases, on a obtenu une base de E (d'après la question précédente) donc on a bien $\boxed{\mathrm{Vect}(a_1, a_2) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E}$.

Problème 1

Partie 1

1. (a) Soient $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $1 + t^2 \geqslant 1$ donc par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $(1 + t^2)^n \geqslant 1^n$. De plus, $(1 + t^2)^n > 0$ donc

$$(1 + t^2)^{n+1} \geqslant (1 + t^2)^n.$$

Par décroissance de la fonction inverse, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{(1 + t^2)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(1 + t^2)^n}.$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0, 1]$, on a donc :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{décroissante et positive}}$.

(b) Etant décroissante et minorée par 0 (car positive), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{convergente}}$ d'après le théorème de convergence monotone.

2. (a) Posons pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = \mathrm{e}^{x/2} - 1 - x$. La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ et on a, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x/2} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{x/2} - 2}{2}.$$

Soit $x \in [0, 1]$ alors, par croissance de la fonction exponentielle,

$$f'(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{1/2} - 2}{2}.$$

Or $\dfrac{\mathrm{e}^{1/2} - 2}{2} = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt{4}}{2}$ et comme $\mathrm{e} \simeq 2.7 < 4$ et que la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $f'(x) < 0$ pour $x \in [0, 1]$.
Ainsi la fonction f est décroissante sur $[0, 1]$ et comme $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \leqslant 0$ i.e. $\mathrm{e}^{x/2} \leqslant 1 + x$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $t \in [0,1]$ alors $t^2 \in [0,1]$ et on a, d'après la question précédente,

$$\mathrm{e}^{t^2/2} \leqslant 1 + t^2.$$

Or $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\mathrm{e}^{nt^2/2} \leqslant (1+t^2)^n.$$

Or $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$$\mathrm{e}^{-nt^2/2} \geqslant \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

et on conclut,par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$, que :

$$u_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2/2}\mathrm{d}t.$$

(c) Utilisons le résultat rappelé dans l'énoncé avec $\alpha = \frac{n}{2}$, on obtient : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$.

(d) D'après la question 1.(a) et l'inégalité montrée à la question 2.(b), on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2/2}\mathrm{d}t$$

Or la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-nt^2/2}$ est positive et l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\mathrm{d}t$ converge, on peut donc écrire que :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\mathrm{d}t.$$

Ainsi d'après la question 2.(c), on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Partie 2

3. La fonction $t \mapsto (1+t^2)^n$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi l'intégrale est impropre en $+\infty$.
On a :

$$1 + t^2 \underset{+\infty}{\sim} t^2 \text{ car } 1 \underset{+\infty}{=} o(t^2)$$

donc par passage à la puissance puis à l'inverse :

$$\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$$

Remarque : il s'agit du premier équivalent que l'on calcule donc on détaille bien les étapes. Si un calcul similaire se présente par la suite, on pourra aller plus vite.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente car c'est une intégrale de Riemann avec $2n > 1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$ est $\boxed{\text{convergente}}$.

4. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1, +\infty[$, on a alors $1 + t^2 \geqslant t^2 \geqslant 0$. En appliquant ensuite la fonction $x \mapsto x^n$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, puis la fonction inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \frac{1}{t^{2n}}$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0, +\infty[$ (qui est licite car toutes les intégrales sont convergentes), on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}\mathrm{d}t = \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{t^{-2n+1}}{-2n+1}\right]_1^M = \frac{1}{2n-1}$. On obtient alors l'inégalité demandée, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n-1}.$$

(b) On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n-1} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

(c) I_n et J_n sont deux intégrales convergentes donc à l'aide de la relation de Chasles, on peut écrire que :

$$J_n = I_n + u_n.$$

Or $(I_n)_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0, on en déduit donc que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$.

5. (a) Posons $M \in \mathbb{R}_+$ et effectuons une intégration par parties sur $\displaystyle\int_0^M \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.
Posons $u(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$ et $v'(t) = 1$. On a $u'(t) = -2nt(1+t^2)^{-n-1}$ et $v(t) = t$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^M + 2n\int_0^M \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{M}{(1+M^2)^n} + 2n\int_0^M \frac{t^2+1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t + 2n\int_0^M \frac{-1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{M}{(1+M^2)^n} + 2n\left(\int_0^M \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t - \int_0^M \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Or $\frac{M}{(1+M^2)^n} \underset{M\to+\infty}{\sim} \frac{1}{M^{2n-1}}$ et $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{M^{2n-1}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\frac{M}{(1+M^2)^n} = 0$.
De plus, pour tout entier naturel n non nul, J_n est convergente donc :

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = J_n \text{ et } \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = J_{n+1}.$$

On en déduit donc la relation demandée, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = 2n(J_n - J_{n+1}).$$

(b) $\displaystyle J_1 = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{1}{(1+t^2)}\mathrm{d}t = \lim_{M\to+\infty}\left[\arctan(t)\right]_0^M = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

(c) D'après la question 5.(a), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{J_n}{n} = 2(J_n - J_{n+1}).$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{J_k}{k} &= 2\sum_{k=1}^n (J_k - J_{k+1}) \\ &= 2(J_1 - J_{n+1}) \quad \text{par télescopage} \\ &= \pi - 2J_{n+1}.\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_{n+1} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{J_k}{k} = \pi$. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{J_n}{n}$ est $\boxed{\text{convergente}}$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{J_k}{k} = \pi}$.

(d) On peut proposer la fonction suivante :

```python
def suiteJ(n) :
    J= np.pi/2
    for k in range(2,n+1) :
        J=J-(1/(2*(k-1))*J
    return J
```

6. Montrons le résultat par récurrence et posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $J_{n+1} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ »

Initialisation $(n=0)$ $\quad J_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \times \dfrac{\binom{2\times 0}{0}}{4^0} = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
D'après la question 5.(a), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} = J_n - \frac{1}{2n}J_n$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_{n+2} = J_{n+1} - \frac{1}{2n+2}J_{n+1}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
J_{n+2} &= \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) J_{n+1} \\
&= \left(\frac{2n+1}{2(n+1)}\right) \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+1)(2n)!}{(n+1) \times 2 \times n! \times n! \times 4^n} \\
&= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+1)!(2n+2)}{2(n+1)! \times n! \times 4^n \times (2n+2)} \\
&= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

Partie 3

7. (a) Notons succès l'événement "obtenir pile", sa probabilité est de $\frac{1}{2}$ car la pièce est équilibrée. On lance $2n$ fois la pièce de manière identique et indépendante, X_n est alors égale au nombre de succès, ainsi $\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})}$.

(b) On remarque que $P(X_n = Y_n) = P(X_n = n)$ puisqu'on lance $2n$ fois la pièce, ainsi on a :

$$P(X_n = Y_n) = P(X_n = n) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2n-n} = \binom{2n}{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \binom{2n}{n} \times \frac{1}{4^n} = \frac{2}{\pi}J_{n+1}.$$

On obtient donc l'égalité demandée. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} J_{n+1} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = Y_n) = 0}$.

(c) On remarque que $X_n + Y_n = 2n$. Ainsi :

$$P(X_n < Y_n) = P(2X_n < 2n) = P(X_n < n) \quad \text{et} \quad P(X_n > Y_n) = P(2Y_n < 2n) = P(Y_n < n).$$

Or on peut montrer avec les mêmes arguments qu'à la question 7.(a) et l'événement "faire face" que $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$. Ainsi X_n et Y_n sont de même loi et donc $\boxed{P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)}$.

(d) On remarque que $\Omega = [X_n < Y_n] \cup [X_n > Y_n] \cup [X_n = Y_n]$. Or les trois événements sont disjoints donc

$$P(\Omega) = P(X_n < Y_n) + P(X_n > Y_n) + P(X_n = Y_n)$$

or $P(\Omega) = 1$ et $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$ d'après la question précédente donc :

$$P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(X_n = Y_n).$$

Or d'après la question 7.(b), $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = Y_n) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2}}$.