

Devoir surveillé n° 5

Durée : 3h

Les documents et tout matériel électronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet composé de 6 pages propose deux pistes :

- **Piste bleue** : Exercice 1, Exercice 2, Problème 1
- **Piste rouge** : Exercice 2, Problème 2

Exercice 1

On dispose de trois urnes contenant chacune 5 boules : l'urne Rouge contient 3 boules rouges, 1 verte et 1 jaune ; l'urne Verte contient 2 boules vertes, 2 rouges et 1 jaune ; l'urne Jaune contient 2 boules jaunes, 2 vertes et 1 rouge.

On choisit une urne au hasard puis on effectue des tirages successifs d'une boule avec remise (dans la même urne) avec la règle suivante : si la boule obtenue est rouge, le tirage suivant s'effectue dans l'urne Rouge, si la boule obtenue est verte, le tirage suivant s'effectue dans l'urne Verte et si la boule obtenue est jaune, le tirage suivant s'effectue dans l'urne Jaune.

Pour tout entier naturel et non nul n , on note R_n l'événement : « le tirage numéro n amène une boule rouge », V_n l'événement : « le tirage numéro n amène une boule verte » et J_n l'événement : « le tirage numéro n amène une boule jaune ». Les événements R_0, V_0 et J_0 désignent l'urne utilisée pour le premier tirage.

1. Calculer $P(R_1)$ puis $P(V_1)$. Que vaut $P(J_1)$?
2. Calculer la probabilité que les trois premières boules tirées soient de couleur verte.
3. L'objectif de cette dernière question est de déterminer l'expression de $P(R_n)$ en fonction n . Pour tout entier naturel et non nul n , on note r_n la probabilité d'obtenir une boule rouge, v_n la probabilité d'obtenir une boule verte et j_n la probabilité d'obtenir une boule jaune au tirage numéro n .
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $r_n + v_n + j_n$? Justifier.
 - (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer les relations suivantes :

$$r_{n+1} = \frac{2}{5}r_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = -\frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}$$

puis en déduire l'expression de r_{n+2} en fonction de r_{n+1} et de r_n .

- (c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = r_n - \frac{7}{16}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 .
- (d) En déduire l'expression de u_n puis celle de r_n en fonction de n .

4. Python

On désigne par 1 l'urne Rouge ainsi que les boules rouges, par 2 l'urne Verte ainsi que les boules vertes et par 3 l'urne Jaune et les boules jaunes.

(a) Recopier et compléter la fonction `ChoixUrne` permettant de simuler le choix de l'urne pour le premier tirage.

```

1 def ChoixUrne():
2     if np.rand() < ..... :
3         y = .....
4     elif ..... :
5         y = .....
6     else :
7         y = .....
8     return .....
```

(b) Ecrire une fonction nommée `UrneRouge` permettant de simuler le tirage d'une boule dans l'urne Rouge.

On pourra s'inspirer de la fonction `ChoixUrne`.

(c) Même question pour l'urne Verte

(d) Même question pour l'urne Jaune.

(e) Recopier et compléter la fonction `Simu` permettant de simuler et de renvoyer le résultat de n tirages pour un entier n donné en entrée.

Ce programme pourra utiliser les fonctions `ChoixUrne`, `UrneRouge`, `UrneVerte`, `UrneJaune`.

```

1 def Simu(.....):
2     y = .....
3     for k in range(.....):
4         if y==1 :
5             y = .....
6         elif ..... :
7             y = .....
8         else :
9             y = .....
10    return .....
```

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Soit f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

- Déterminer la matrice A de l'application linéaire f dans la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Vérifier que $A^2 = 3A - 2I_3$.
- En déduire que $f^2 = 3f - 2\text{Id}_E$.
- Montrer que f est un isomorphisme et déterminer sa bijection réciproque.
- Déterminer une base de $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ et une base de $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.
- Montrer que $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E .
- (a) Déterminer des endomorphismes p et q de E tels que $p + q = \text{Id}_E$ et $2p + q = f$. On pourra les exprimer en fonction de f et de Id_E .
 (b) Montrer que p et q sont des projecteurs.
 (c) Vérifier que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$.

Problème 1 *Piste bleue, EDHEC 2024*

Partie 1

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. On a donc $u_0 = 1$.

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
- (b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. (a) Montrer que, pour tout x de $[0, 1]$, on a l'inégalité : $e^{x/2} \leq 1 + x$.
- (b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'inégalité :

$$u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt$$

- (c) Donner la valeur, pour tout entier naturel n non nul, de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt$.

Indication : On admet que pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.*

- (d) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie 2

3. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ est convergente.

Pour toute la suite, on pose, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

4. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}$$

- (b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

5. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties effectuée dans J_n , que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$$

- (b) Déterminer J_1 .

- (c) Montrer que la série de terme général $\frac{J_n}{n}$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \pi$.

- (d) Utiliser la relation de la question 5.(a) pour compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la valeur de J_n .

```

1 def suiteJ(n) :
2     J = .....
3     for k in range (2, n+1):
4         J = .....
5     return J
    
```

6. Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

Partie 3

On désigne par n un entier naturel non nul et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de "piles" (resp. "faces") obtenus lors des $2n$ premiers lancers supposés indépendants d'une pièce équilibrée.

7. (a) Donner, en justifiant, la loi de X_n .

(b) Montrer que $P(X_n = Y_n) = \frac{2}{\pi} J_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = Y_n)$.

(c) Justifier sans calcul l'égalité $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$.

(d) Montrer que la probabilité d'obtenir strictement moins de "piles" que de "faces" lors de l'expérience décrite plus haut tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 2 *Piste rouge, EDHEC 2025*

On considère la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Le problème est décomposé en quatre parties. Dans la partie 1, on utilise l'algorithmique pour coder les termes de la suite $(B_n)_{n \geq 0}$. Dans la partie 2, on obtient des estimations de la suite $(B_n)_{n \geq 0}$. Dans la partie 3, à l'aide de la partie 2, on étudie une variable aléatoire. Dans la partie 4, toujours à l'aide de la partie 2, on étudie une fonction dont l'expression est donnée par une somme.

Les parties 3 et 4 sont totalement indépendantes.

On rappelle que pour une suite $(u_k)_{k \geq 0}$, $\prod_{k=1}^0 u_k = 1$ par convention.

On rappelle aussi que si p, q sont deux entiers naturels tels que $p < q$, $\llbracket p; q \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre p (inclus) et q (inclus).

Partie 1

1. Justifier que pour tout entier naturel n , on a :
$$B_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+n}{4k}.$$

Compléter alors le code de la fonction Python `B`, prenant en entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de B_n .

```

1 def B(n):
2     P = ... # Initialisation
3     for k in range(...):
4         P = ...
5     return P

```

Partie 2

On pose pour tout entier naturel n , $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$.

2. Calculer W_0 et W_1 .

3. Montrer que la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

4. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

5. En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}.$$

6. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$W_{2n-1} = \frac{1}{2n B_n}.$$

7. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2n B_n},$$

puis :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$

8. En déduire un équivalent de B_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 3

On considère dans cette section du problème une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$, définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(X_n = 1) = P(X_n = -1).$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$. Préciser son espérance et sa variance.

(b) En déduire la loi de la variable T_n définie par $T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n X_k$.

Indication : On admettra que si $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p alors $Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k$ suit une loi binomiale de paramètres n et p .

(c) Montrer que $S_n(\Omega) = \{2j - n, j \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ et déterminer la loi de S_n .

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit la variable aléatoire R_n comme étant le cardinal de l'ensemble $\{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket : S_k = 0\}$. Autrement dit, pour $\omega \in \Omega$, $R_n(\omega)$ est égal au nombre d'entiers $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ tels que $S_k(\omega) = 0$.

(a) Justifier que :

$$R_n = \text{Card} \left\{ k \in \llbracket 1, n \rrbracket : S_{2k} = 0 \right\}.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$P(S_{2k} = 0) = B_k.$$

(c) On rappelle que pour un événement A , la fonction indicatrice de A définie de Ω dans \mathbb{R} , notée $\mathbf{1}_A$, est définie par :

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_k = \{S_{2k} = 0\}$. Donner une expression de R_n à l'aide des fonctions indicatrices des événements A_k .

(d) En déduire que l'espérance de R_n est donnée par la formule :

$$E(R_n) = \sum_{k=1}^n B_k.$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right).$$

12. En déduire alors, à l'aide des résultats de la partie 2 puis par sommation, un équivalent de l'espérance de R_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 4

13. (a) Montrer que :

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}.$$

On pourra admettre l'équivalent démontré dans la question 8, à savoir : $B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

(b) En déduire que pour tout réel $x \in [0, 4[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge.

Soit f la fonction définie sur $[0, 4[$ par :

$$\forall x \in [0, 4[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}.$$

14. Justifier que f est croissante sur $[0, 4[$.

On admet dans la suite que f est continue sur $]0, 4[$.

15. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, 4[$ et tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}(n+1) \left(\frac{x}{4}\right)^n.$$

(b) En déduire que :

$$\forall x \in [0, 4[, \quad \sqrt{\pi} \frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{4} \times \frac{1}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x} \right).$$

Déterminer alors les limites de f en 0^+ et en 4^- .

16. Montrer que pour tout réel $x \in [0, 4[$, $f(x) \geq \frac{x}{2}$.

17. On admet que :

$$f(x) = \frac{x}{2} + o(x).$$

En utilisant tous les résultats précédents, tracer l'allure précise de la courbe de la fonction f .