

Corrigé du DS n° 4

Problème 1 *ESCP voie T*

1. (a) Soit $x \in [0; 1]$. Alors :

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\iff 0 \leq x^2 \leq 1 && \text{par croissance de } x \mapsto x^2 \\ &\iff -1 \leq -x^2 \leq 0 \\ &\iff e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq e^0 && \text{par croissance de } x \mapsto e^x \end{aligned}$$

Or, $e^{-1} > 0$ et $e^0 = 1$. D'où, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$0 \leq e^{-x^2} \leq 1.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0; 1]$, $x^n \geq 0$ et donc,

$$\forall x \in [0; 1], \quad 0 \leq x^n e^{-x^2} \leq x^n.$$

D'où, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx.$$

Or, $\int_0^1 x^n e^{-x^2} dx = I_n$ et $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Ainsi, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(c) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'où, d'après la question précédente, et d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$.

2. Une primitive de la fonction définie sur $[0; 1]$ par $x \mapsto x e^{-x^2}$ est donnée par $x \mapsto -\frac{1}{2} e^{-x^2}$. Ainsi,

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}.$$

3. (a) Posons

$$\begin{aligned} u(x) &= x^{n+1} & u'(x) &= (n+1)x^n \\ v'(x) &= x e^{-x^2} & v(x) &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ donc par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^1 u(x)v'(x) dx \\ &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \times x^{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^n \times \frac{1}{2} e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2e} + \frac{n+1}{2} I_n \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$nI_n = \frac{1}{e} + 2I_{n+2} - I_n.$$

Or, d'après la question 1.(c), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. On a donc également, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+2} = 0$. Et donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \frac{1}{e}}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} = \frac{I_{2(n+1)+1}}{(n+1)!} = \frac{I_{2n+3}}{(n+1)!}.$$

Or, d'après la question 3.(a) et puisque $2n+3 = (2n+1) + 2$, on a :

$$I_{2n+3} = \frac{(2n+1)+1}{2} I_{2n+1} - \frac{1}{2e},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} I_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2} I_{2n+1} - \frac{1}{2e} \\ &= (n+1)I_{2n+1} - \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(n+1)I_{2n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{I_{2n+1}}{n!} - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!} \\ &= u_n - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

On montre la relation par récurrence, soit $n \in \mathbb{N}$, notons \mathcal{P}_n la proposition « $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ ».

Initialisation ($n=0$) : $u_0 = \frac{I_1}{0!} = I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$ d'après la question 2.(b). Par ailleurs, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$. Donc,

\mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons \mathcal{P}_n vraie et montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie. D'après ce qui précède, on a :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!}.$$

D'autre part, par hypothèse de récurrence, on sait que :

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Donc, \mathcal{P}_{n+1} est vraie, et ainsi, la proposition est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

(b) Par définition de u_n , on a $I_{2n+1} = n!u_n$. D'après l'expression de u_n obtenue à la question précédente, on en déduit :

$$I_{2n+1} = \frac{n!}{2} - \frac{n!}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

(c) Soit $k \geq 1$ un entier. Posons $n = 2k - 1 \in \mathbb{N}^*$ dans l'égalité de la question 3.(a), on obtient :

$$I_{(2k-1)+2} = \frac{(2k-1)+1}{2} I_{2k-1} - \frac{1}{2e} = \frac{2k}{2} I_{2k-1} - \frac{1}{2e} = k I_{2k-1} - \frac{1}{2e}.$$

(d) On complète la fonction Python comme suit :

```

1 def caclulint(n):
2     l=1/2-1/(2*np.exp(1))
3     for k in range(1,n+1)
4         l=k*l-1/(2*np.exp(1))
5     return l

```

Problème 2

1. (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $((x, y, z), (x', y', z')) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') + 3(\lambda z + z') \\ &= \lambda(x - 2y + 3z) + (x' - 2y' + 3z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z'). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. Et comme f est à valeurs dans \mathbb{R} alors f est bien une forme linéaire.
On montre exactement de la même manière que g est une forme linéaire.

(b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(f) \iff x - 2y + 3z = 0 \iff x = 2y - 3z$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(2y - 3z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((2, 1, 0), (-3, 0, 1)) \end{aligned}$$

La famille $((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$ est génératrice de $\text{Ker}(f)$ par définition, et elle est libre car les deux vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires. Donc la famille $((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(g) \iff -x + 3y - 4z = 0 \iff x = 3y - 4z$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{Ker}(g) &= \{3y - 4z, y, z \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(3, 1, 0) + z(-4, 0, 1) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((3, 1, 0), (-4, 0, 1)) \end{aligned}$$

La famille $((3, 1, 0), (-4, 0, 1))$ est génératrice de $\text{Ker}(g)$ par définition, et elle est libre car les deux vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires. Donc la famille $((3, 1, 0), (-4, 0, 1))$ est une base de $\text{Ker}(g)$.

Enfin, soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) &\iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -x + 3y - 4z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{(-z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, 1, 1)).$$

La famille $((-1, 1, 1))$ est génératrice de $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ par définition et elle est libre car elle est composée d'un seul vecteur, qui est non nul. Donc la famille $((-1, 1, 1))$ est une base de $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$.

(c) Comme f est à valeurs dans \mathbb{R} alors $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x = f((x, 0, 0))$ donc $x \in \text{Im}(f)$. Ainsi $\mathbb{R} \subset \text{Im}(f)$ et on obtient l'égalité $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

De même, comme g est à valeurs dans \mathbb{R} alors $\text{Im}(g) \subset \mathbb{R}$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Alors $x = g((-x, 0, 0))$ donc $x \in \text{Im}(g)$. Ainsi $\mathbb{R} \subset \text{Im}(g)$ et on obtient l'égalité $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$.

2. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in E \times E$. Alors

$$\Phi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(-1) = \lambda f(-1) + g(-1) = \lambda \Phi(f) + \Phi(g).$$

Donc Φ est linéaire, et comme Φ est à valeurs dans \mathbb{R} , alors Φ est bien une forme linéaire.

(b) Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E .

- On a clairement $F \subset E$.

- Soit θ l'application nulle. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \theta(x) = 0 \cdot x + 0$. Donc $\theta \in F$.

- Soient f et g deux applications affines, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme f est affine, alors il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Comme g est affine, alors il existe deux réels a' et b' tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = a'x + b'$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x) = \lambda(ax + b) + (a'x + b') = (\lambda a + a')x + (\lambda b + b').$$

Donc $\lambda f + g \in F$.

F est donc bien un sous-espace vectoriel de E .

Déterminons maintenant une base de $F \cap \text{Ker}(\phi)$.

Soit $f \in F \cap \text{Ker}(\phi)$. Alors il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Et

$$f \in \text{Ker}(\Phi) \iff f(-1) = 0 \iff -a + b = 0 \iff a = b.$$

Ainsi

$$F \cap \text{Ker}(\Phi) = \{x \mapsto a(x + 1) \mid a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(h)$$

où h est l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = x + 1$. Comme h n'est pas l'application nulle, alors la famille (h) est une base de $\text{Ker}(\Phi) \cap F$.

(c) Soit $g \in G \cap \text{Ker}(\phi)$. Alors il existe λ et μ deux réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lambda \arctan(x) + \mu x$. Et

$$g \in \text{Ker}(\Phi) \iff h(-1) = 0 \iff -\lambda \cdot \frac{\pi}{4} - \mu = 0 \iff \mu = -\lambda \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi $g(x) = \lambda \arctan(x) - \lambda \frac{\pi}{4} x = \lambda \left(\arctan(x) - \frac{\pi}{4} x \right)$ et on a alors

$$G \cap \text{Ker}(\Phi) = \text{Vect}(h)$$

où l'application $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{4} x.$$

Par définition la famille (h) est génératrice de $G \cap \text{Ker}(\Phi)$. Comme h n'est pas l'application nulle, en effet, $h(4) = \arctan(4) - \pi \leq -\frac{\pi}{2}$, alors la famille (h) est libre et donc c'est une base de $G \cap \text{Ker}(\Phi)$.

(d) Comme Φ est à valeurs dans \mathbb{R} alors $\text{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f l'application constante égale à α . Alors $f(-1) = \alpha$ i.e. $\Phi(f) = \alpha$. Donc $\alpha \in \text{Im}(\Phi)$. Ainsi $\mathbb{R} \subset \text{Im}(\Phi)$ et donc $\text{Im}(\Phi) = \mathbb{R}$.

3. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M' = (m'_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\text{Tr}(\lambda M + M') = \sum_{i=1}^n [\lambda M + M']_{i,i} = \sum_{i=1}^n (\lambda m_{i,i} + m'_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^n m_{i,i} + \sum_{i=1}^n m'_{i,i}.$$

Ainsi $\text{Tr}(\lambda M + M') = \lambda \text{Tr}(M) + \text{Tr}(M')$. Donc l'application trace est linéaire, et comme elle est à valeurs dans \mathbb{R} , alors Tr est bien une forme linéaire.

- (b) Comme $\text{Ker}(\text{Tr}) \cap \text{Vect}(I_n)$ est une intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\text{Ker}(\text{Tr}) \cap \text{Vect}(I_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donc $\{0_n\} \subset \text{Ker}(\text{Tr}) \cap \text{Vect}(I_n)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $M \in \text{Ker}(\text{Tr}) \cap \text{Vect}(I_n)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$. Et $M \in \text{Ker}(\text{Tr})$ donc $\text{Tr}(M) = 0$. Or

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(\lambda I_n) = \sum_{i=1}^n [\lambda I_n]_{i,i} = \sum_{i=1}^n \lambda = \lambda n$$

Donc $\lambda n = 0$ i.e. $\lambda = 0$. Ainsi $M = 0 \cdot I_n = 0_n$. Donc $\text{Ker}(\text{Tr}) \cap \text{Vect}(I_n) \subset \{0_n\}$ i.e. $\boxed{\text{Ker}(\text{Tr}) \cap \text{Vect}(I_n) = \{0_n\}}$.

- (c) Comme Tr est à valeurs dans \mathbb{R} alors $\text{Im}(\text{Tr}) \subset \mathbb{R}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit M la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf $m_{1,1}$ valant α . Alors

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i} = \alpha.$$

Donc $\alpha \in \text{Im}(\text{Tr})$. Ainsi $\mathbb{R} \subset \text{Im}(\text{Tr})$ et donc $\boxed{\text{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{R}}$.

- (d) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$, on rappelle que $AB = (c_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ avec

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

On obtient alors :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{j,i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^n c_{j,j} = \text{Tr}(BA)$$

- (e) Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables. Alors il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible P tel que $N = P^{-1}MP$. Ainsi, d'après la question précédente,

$$\text{Tr}(N) = \text{Tr}(P^{-1}(MP)) = \text{Tr}((MP)P^{-1}) = \text{Tr}(M).$$

Problème 3 *Ericome 2015, voie E*

Partie I

1. On appelle succès l'événement : « obtenir Pile ». Sa probabilité est de $p = \frac{2}{3}$. Un lancer de pièce est donc une épreuve de Bernoulli. On répète cette épreuve de Bernoulli 3 fois de manière identique et indépendante. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 2/3).$$

Le joueur est déclaré vainqueur si il effectue un nombre pair de Pile soit 0 ou 2, ainsi :

$$P(A) = P([X = 0] \cup [X = 2]) = P([X = 0]) + P([X = 2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1 + 3 \times 4}{3^3} = \frac{13}{27}.$$

2. Pour chaque valeur de X , on a une valeur différente de G . Si $X = 0$, alors $G = 0$, si $X = 1$, alors on perd 10 euros et $G = -10$, si $X = 2$, alors on gagne 20 euros et $G = 20$. Enfin, si $X = 3$, on perd 30 euros et $G = -30$. Au final,

$$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$

On a ensuite :

$$P(G = 0) = P(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

$$P(G = 20) = P(X = 2) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(G = -30) = P(X = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$P(G = -10) = P(X = 1) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

3. On calcule l'espérance

$$\begin{aligned}
 E(G) &= -30P(G = -30) - 10P(G = -10) + 20P(G = 20) \\
 &= -30P(X = 3) - 10P(X = 1) + 20P(X = 2) \\
 &= -30 \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 10 \times 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 20 \times 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \\
 &= \frac{-60}{27} = \frac{-20}{9}
 \end{aligned}$$

On trouve donc que $E(G) < 0$ et le jeu est défavorable au joueur.

4. (a) On a la fonction Python suivante :

```

1 def loiX():
2     x = 0
3     for k in range(3):
4         if rd.rand() < 2/3 :
5             x = x+1
6     return x

```

(b) On a la fonction Python suivante :

```

1 def loiG():
2     x = loiX()
3     if x==0 :
4         G = 0
5     elif x==1 :
6         G = -10
7     elif x==2 :
8         G = 20
9     else :
10        G = -30
11    return G

```

Partie II

1. (a) Si $Y = 1$, alors $Z = 1$. Si $Y = -1$, alors $Z = 0$. On a bien $Z(\Omega) = \{0; 1\}$. De plus,

$$P(Z = 1) = P(Y = 1) = P(X \in 2\mathbb{N}) = P(A),$$

et on a bien $Z \leftrightarrow \mathcal{B}(P(A))$.

(b) D'après la question précédente, $E(Z) = P(A)$ et $Y = 2Z - 1$. Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(Y) = E(2Z - 1) = 2E(Z) - 1 = 2P(A) - 1.$$

2. (a) On appelle succès l'événement : « obtenir Pile ». Sa probabilité est de p . Un lancer de pièce est donc une épreuve de Bernoulli. On répète cette épreuve de Bernoulli n fois de manière identique et indépendante. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, ainsi X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

$$X \leftrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

(b) D'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= E((-1)^X) \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k P(X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

On utilise alors la formule du binôme

$$E(Y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p+1-p)^n = (1-2p)^n.$$

3. D'après les questions 1b. et 2b., on a

$$(1-2p)^n = E(Y) = 2P(A) - 1 \iff P(A) = \frac{(1-2p)^n + 1}{2}.$$

4. On résout

$$\begin{aligned} P(A) \geq \frac{1}{2} &\iff \frac{(1-2p)^n + 1}{2} \geq \frac{1}{2} \\ &\iff (1-2p)^n \geq 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } 1-2p \geq 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } p \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Partie III

1. On "gagne" 10 euros pour chaque *Pile* (compté avec X) affecté du signe donné par Y selon la parité de X , ou encore

$$G = 10XY = 10X(-1)^X.$$

Toujours avec le théorème de transfert, on obtient

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{k=0}^n 10k(-1)^k P(X=k) \\ &= 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

2. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

3. En utilisant le résultat de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} E(G) &= 10 \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} \\ &= 10n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (-p)^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= 10n(-p) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-p)^j (1-p)^{n-1-j} \quad \text{en posant } j = k-1 \\ &= -10np(1-2p)^{n-1} \quad \text{en utilisant la formule du binôme de Newton.} \end{aligned}$$

4. On connaît déjà les conditions pour que $P(A) \geq 1/2$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} E(G) \leq 0 &\iff -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0 \\ &\iff (1-2p)^{n-1} \geq 0 \\ &\iff 1-2p \geq 0 \text{ ou } n \text{ impair} \end{aligned}$$

Comme n ne peut pas être pair et impair à la fois, l'intersection des conditions précédentes donne bien

$$\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

5. (a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur \mathbb{R} et *a fortiori* sur $[0; \frac{1}{2}]$. Le calcul donne

$$f'(x) = (1 - 2x)^{n-2}(1 - 2nx).$$

On obtient le tableau de variations suivant

x	0	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$		+	0	-
f	0	$f(\frac{1}{2n})$		0

avec

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

(b) La rentabilité est optimale pour le concepteur lorsque l'espérance du gain est minimale, ou, de manière équivalente, lorsque $f(p)$ est maximal sur $[0; 1/2]$. Il faut donc choisir

$$p = \frac{1}{2n}.$$