Corrigé du DS n° 4

Exercice 1

1. (a) On a pour tout $x \in I$, $\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))}$.

   (b) i. Il faut que la fonction f soit $\boxed{\text{dérivable}}$ sur I et que pour tout $x \in I$, $\boxed{f'(x) \neq 0}$.

   ii. On a alors pour tout $y \in J$,

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}.$$

   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$.

2. (a) La fonction $\sin$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \sin'(x) = \cos(x) \geqslant 0$. Or, $\cos(x)$ s'annule seulement en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$ sur cet intervalle donc $\sin$ y est strictement croissante. Elle est également continue sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, $\sin$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1]$.

   Conclusion : L'application $\sin$ réalise une $\boxed{\text{bijection de } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ dans } [-1,1]}$.

   (b) D'après la question précédente, $\arcsin(x)$ est l'unique réel de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x.
   Ainsi, comme on a $\sin(0) = 0$ et $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on en déduit que $\arcsin(0) = 0$.
   De même, on a $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ et $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
   Conclusion : $\boxed{\arcsin(0) = 0,\ \arcsin(1) = \frac{\pi}{2},\ \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}}$.

   (c) La continuité de $\arcsin$ est donnée par le théorème de la bijection. L'application $\sin$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$. De plus, $\sin(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-1,1[$. Ainsi $\arcsin$ est $\boxed{\text{dérivable sur }]-1,1[}$.
   Soit $x \in]-1,1[$. On a

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

   Or $\arcsin(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et donc $\cos(\arcsin(x)) \geqslant 0$. Ainsi

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{\cos^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

   Conclusion : Pour tout $x \in]-1,1[$, $\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

3. (a) L'application $\cos$ est dérivable sur $[0,\pi]$ et pour tout $x \in [0,\pi], \cos'(x) = -\sin(x) \leqslant 0$. Or, $\sin(x)$ s'annule seulement en 0 et π sur cet intervalle. Donc $\cos$ strictement décroissante et continue sur l'intervalle $[0,\pi]$. Elle y est également continue. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, $\cos$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $\cos([0,\pi]) = [\cos(\pi), \cos(0)] = [-1,1]$.
   Conclusion : $\cos$ réalise une $\boxed{\text{bijection de } [0,\pi] \text{ sur } [-1,1]}$.

   (b) D'après la question précédente $\arccos(x)$ est l'unique réel de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut x.
   On a $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$ donc $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.
   De même, $\arccos(1) = 0$ et $\arccos(-1) = \pi$.
   Conclusion : $\boxed{\arccos(0) = \frac{\pi}{2},\ \arccos(1) = 0 \text{ et } \arccos(-1) = \pi}$.

(c) La continuité de $\arccos$ est donnée par le théorème de la bijection. L'application $\cos$ est dérivable sur $[0,\pi]$ et, pour tout $x \in]0,\pi[$, on a $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$. De plus, $\cos(]0,\pi[) =]-1,1[$. Ainsi $\arccos$ est $\boxed{\text{dérivable sur}]-1,1[}$.
Soit $x \in]-1,1[$. On a

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}.$$

Or $\arccos(x) \in]0,\pi[$ et donc $\sin(\arccos(x)) \geqslant 0$. Ainsi, on obtient comme précédemment, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
Conclusion : Pour tout $x \in]-1,1[$, $\boxed{\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

4. On note $f : x \in [-1,1] \mapsto \arcsin(x)+\arccos(x)$. D'après les questions précédentes, l'application f est dérivable sur $]-1,1[$. De plus, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Ainsi, puisque $]-1,1[$ est un intervalle, f est constante sur $]-1,1[$ i.e. :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, on vérifie que $f(1) = f(-1) = \frac{\pi}{2}$.

Conclusion : $\forall x \in [-1,1]$, $\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2}}$.

5. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2+1 > x^2$. Ainsi, par stricte croissante de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|.$$

Il vient alors $-\sqrt{1+x^2} < -|x| \leqslant x$. On pourra raisonner par disjonction des cas sur le signe de x pour se convaincre de la dernière inégalité. Ainsi,

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} > -1.$$

Puis, puisque $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ et $|x| \geqslant x$, il vient

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1.$$

Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1,1[}$.

(b) Notons

$$g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \arctan(x).$$

La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1,1[$ d'après la question précédente. Or $\arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$ donc par composition et somme g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 0$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, on en déduit qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha.$$

En particulier, on a $\alpha = g(0) = \arcsin(0) - \arctan(0) = 0$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan(x)}$.

6. (a) Pour tout $x \in]0,1[$ on a, $\sqrt{x} < \sqrt{1} = 1$ par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$0 < (\sqrt{x}-1)^2 = x - 2\sqrt{x} + 1.$$

Ainsi, pour tout $x \in]\,0,1\,[$, on a $2\sqrt{x} < 1 + x$ et donc $\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} < 1$.

Par ailleurs, par quotient de nombres strictement positifs, $\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} > 0$.

Conclusion : Pour tout $x \in]0,1[$, $\boxed{0 < \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} < 1}$.

(b) Notons

$$h : x \in [0,1] \longmapsto \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) - 2\arctan(\sqrt{x}).$$

L'application $x \in [0,1] \mapsto 2\arctan(\sqrt{x})$ est dérivable sur $]0,1]$. De plus, d'après la question précédente, $x \in [0,1] \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ est dérivable sur $]0,1[$ comme composée d'une application dérivable sur $]0,1[$ et à valeurs dans $]-1,1[$, et de l'application $\arcsin$ qui est dérivable sur $]-1,1[$. Ainsi, l'application h est dérivable sur $]0,1[$. De plus, pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}} \cdot \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}(1+x) - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} - 2 \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \\ &= \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $]0,1[$ est un intervalle, h est constante sur $]0,1[$ i.e. il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0,1[$, $h(x) = \beta$. Par continuité de h sur $[0,1]$, on obtient : $\forall x \in [0,1]$, $h(x) = \beta$. On a donc

$$\beta = h(1) = \arcsin(1) - 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} = 0.$$

Conclusion : Pour tout $x \in [0,1]$, $\boxed{\arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = 2\arctan(\sqrt{x})}$.

7. On pouvait compléter le programme de la manière suivante :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f( x ):
    return np.cos(x)
xmax= np.pi
xmin= 0
abscisse=np.arange(xmin, xmax, 0.0001)
plt.plot(abscisse, f(abscisse))
```

Ensuite, il suffit de tracer le symétrique de la courbe obtenue par la symétrie axiale d'axe $y = x$.

Problème 1

Partie A : Etude de trois exemples.

1. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $((x,y,z),(x',y',z')) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} & f\left(\lambda(x,y,z) + (x',y',z')\right) \\ &= f\left(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z'\right) \\ &= \left(\lambda x + x' + \lambda y + y' + \lambda z + z', 2\left(\lambda x + x'\right) + \lambda y + y', -\left(\lambda x + x'\right) + \lambda z + z'\right) \\ &= \left(\lambda(x+y+z) + x' + y' + z', \lambda(2x+y) + 2x' + y', \lambda(-x+z) - x' + z'\right) \\ &= \lambda f(x,y,z) + f\left(x',y',z'\right). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Donc f est un $\boxed{\text{endomorphisme de } \mathbb{R}^3}$. De même on montre que g est un $\boxed{\text{endomorphisme de } \mathbb{R}^3}$. *(Mais il faudrait réellement le rédiger sur votre copie).*

(b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x,y,z) = (0,0,0)\\ &\iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y=0 \\ -x+z=0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1\\ &\iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-2z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x=z \\ y=-2z \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(1,-2,1) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-2,1))$$

La famille $((1, -2, 1))$ est donc génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ par définition, et libre car elle ne contient qu'un seul vecteur et qu'il est non nul. Donc $((1, -2, 1))$ est une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Ker}(f)}$.

La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ donc c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1))\\ &= \mathrm{Vect}((1,2,-1),(1,1,0),(1,0,1))\\ &= \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1))\end{aligned}$$

car $(1, 2, -1) = 2(1, 1, 0) - (1, 0, 1)$. La famille $((1, 1, 0), (1, 0, 1))$ est donc génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ par définition, et libre car les deux vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires. Donc c'est une $\boxed{\text{base de}\, \mathrm{Im}(f)}$.

On montre de même que la famille $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Ker}(g)}$ et que la famille $((1, -2, 1))$ est une $\boxed{\text{base de}\, \mathrm{Im}(g)}$. *(Mais il faudrait réellement le rédiger sur votre copie).*

(c) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}f \circ g(x,y,z) &= f(g(x,y,z))\\ &= f(x+y+z, -2x-2y-2z, x+y+z)\\ &= ((x+y+z)+(-2x-2y-2z)+(x+y+z), \dots, \dots)\\ &= (0,0,0).\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a montré que $f \circ g$ est $\boxed{\text{l'endomorphisme nul de } \mathbb{R}^3.}$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}g \circ f(x,y,z) &= g(f(x,y,z))\\ &= g(x+y+z, 2x+y, -x+z)\\ &= (2x+2y+2z, -4x-4y-4z, 2x+2y+2z)\\ &= 2g(x,y,z).\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a montré que $\boxed{g \circ f = 2g}$.

(d) Ainsi $f \circ g - g \circ f = -2g$. Le réel $\boxed{\alpha = -2}$ répond donc à la question.

2. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, alors

$$f_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda f_A(M) + f_A(N).$$

Donc f_A est linéaire. Or $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc f_A est un $\boxed{\text{endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

(b) i. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$f_A \circ f_B(M) = f_A\left(f_B(M)\right) = f_A(BM) = ABM.$$

De même $f_B \circ f_A(M) = BAM$ et donc

$$\left(f_A \circ f_B - f_B \circ f_A\right)(M) = ABM - BAM = (AB - BA)M = f_{AB-BA}(M).$$

Ceci est vrai pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\boxed{f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = f_{AB-BA}}$.

ii. Raisonnons par double implication.

(⇒) Supposons que $f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = \alpha f_B$. Alors, d'après la question précédente, $f_{AB-BA} = \alpha f_B$ et donc, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$f_{AB-BA}(M) = \alpha f_B(M) \quad \text{i.e.} \quad (AB - BA)M = \alpha BM$$

En particulier $(AB - BA)I_n = \alpha B I_n$ i.e. $AB - BA = \alpha B$.

(⇐) Réciproquement supposons que $AB - BA = \alpha B$. Alors, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$f_{AB-BA}(M) = f_{\alpha B}(M) = (\alpha B)M = \alpha f_B(M).$$

Donc $f_{AB-BA} = \alpha f_B$ ce qui permet de conclure avec la question précédente que

$$f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = \alpha f_B$$

3. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(h_1, h_2) \in E^2$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$S\left(\lambda h_1 + h_2\right)(x) = x\left(\lambda h_1 + h_2\right)'(x) = \lambda x h_1'(x) + x h_2'(x) = \lambda S\left(h_1\right)(x) + S\left(h_2\right)(x).$$

Donc $S\left(\lambda h_1 + h_2\right) = \lambda S\left(h_1\right) + S\left(h_2\right)$. Donc S est linéaire et $S : E \to E$. Donc S est un $\boxed{\text{endomorphisme de } E}$.

On montre de même que T est un $\boxed{\text{endomorphisme de } E}$. *(Mais il faudrait réellement le rédiger sur votre copie).*

(b) Soit $h \in \operatorname{Ker}(S)$. Alors $S(h)$ est la fonction nulle i.e. : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(h)(x) = 0$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xh'(x) = 0 \quad \text{i.e. } h'(x) = 0 \quad (\text{car } x \neq 0).$$

Donc h' est la fonction nulle et donc h est une application constante. On a donc montré que :
$\operatorname{Ker}(S) \subset \{h \in E \mid h \text{ est une application constante }\}$.
Soit maintenant h une application constante sur $\mathbb{R}_+^*$, montrons que $h \in \operatorname{Ker}(S)$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = 0 \quad \text{et donc} \quad S(h)(x) = 0.$$

Donc $S(h) = 0_E$ et donc $h \in \operatorname{Ker}(S)$.
Comme on a montré les deux inclusions, on peut en conclure que : $\boxed{\operatorname{Ker}(S) = \{h \in E \mid h \text{ est une application constante }\}}$.
On montre de la même manière que $\boxed{\operatorname{Ker}(T) = \{h \in E \mid h \text{ est une application constante }\}}$. *(Mais il faudrait réellement le rédiger sur votre copie).*

(c) Soit $h \in E$. Calculons dans un premier temps $S \circ T(h)$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$[S \circ T(h)](x) = S(T(h))(x) = x(T(h))'(x).$$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, T(h)(x) = x^4 h'(x)$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (T(h))'(x) = x^4 h''(x) + 4x^3 h'(x)$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$[S \circ T(h)](x) = x^5 h''(x) + 4x^4 h'(x)$$

Calculons maintenant $T \circ S(h)$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$[T \circ S(h)](x) = T(S(h))(x) = x^4(S(h))'(x).$$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, S(h)(x) = xh'(x)$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (S(h))'(x) = xh''(x) + h'(x)$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$[T \circ S(h)](x) = x^5 h''(x) + x^4 h'(x)$$

Ainsi : : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$[S \circ T(h)](x) - [T \circ S(h)](x) = 3x^4 h'(x) = 3T(h)(x)$$

Donc

$$S \circ T(h) - T \circ S(h) = 3T(h)$$

Ceci étant vrai pour tout $h \in E$, on a montré que $\boxed{S \circ T - T \circ S = 3T}$. Le réel $\boxed{\alpha = 3}$ convient.

Partie B : Etude générale.

On note $(*)$ l'égalité $f \circ g - g \circ f = \alpha g$.

1. (a) i. Soit $x \in \operatorname{Ker}(g)$. Alors $g(x) = 0_E$ donc $f(g(x)) = f(0_E) = 0_E$ i.e. $f \circ g(x) = 0_E$. Or d'après la relation $(*)$ évaluée en x,
$$f \circ g(x) - g \circ f(x) = \alpha g(x) \quad \text{i.e.} \quad 0_E - g(f(x)) = \alpha \cdot 0_E = 0_E.$$
Donc $g(f(x)) = 0_E$ i.e. $f(x) \in \operatorname{Ker}(g)$. En conclusion, $\forall x \in \operatorname{Ker}(g)$, $\boxed{f(x) \in \operatorname{Ker}(g)}$.

ii. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$ donc $g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$ i.e. $g \circ f(x) = 0_E$. Or d'après la relation $(*)$ évaluée en x,
$$f \circ g(x) - g \circ f(x) = \alpha g(x) \quad \text{i.e.} \quad f(g(x)) - 0_E = \alpha \cdot g(x).$$
Donc $f(g(x)) - \alpha g(x) = 0_E$ i.e. $(f - \alpha \operatorname{Id}_E)(g(x)) = 0_E$ i.e. $g(x) \in \operatorname{Ker}(f - \alpha \operatorname{Id}_E)$.
En conclusion, $\forall x \in \operatorname{Ker}(f)$, $\boxed{g(x) \in \operatorname{Ker}(f - \alpha \operatorname{Id}_E)}$.

iii. Soit $x \in \operatorname{Im}(g)$. Alors il existe $a \in E$ tel que $x = g(a)$. Donc, d'après la relation (*) évaluée en a puis par linéarité de g,
$$f(x) = f(g(a)) = f \circ g(a) = \alpha g(a) + g \circ f(a) = \alpha g(a) + g(f(a)) = g(\alpha a + f(a))$$
Donc $f(x) \in \operatorname{Im}(g)$. En conclusion, $\forall x \in \operatorname{Im}(g)$, $\boxed{f(x) \in \operatorname{Im}(g)}$.

(b) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Ker}(g - \mu \operatorname{Id}_E)$.
En particulier, $x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ donc $(f - \lambda \operatorname{Id}_E)(x) = 0_E$ i.e. $f(x) - \lambda x = 0_E$ i.e. $f(x) = \lambda x$.
De même comme $x \in \operatorname{Ker}(g - \mu \operatorname{Id}_E)$, on a $g(x) = \mu x$. D'après la relation $(*)$ évaluée en x, on a
$$f(g(x)) - g(f(x)) = \alpha g(x) \text{ i.e. } \quad f(\mu x) - g(\lambda x) = \alpha \mu x \quad \text{i.e.} \quad \mu f(x) - \lambda g(x) = \alpha \mu x \text{ par linéarité de } f \text{ et } g.$$
Puis en remplaçant de nouveau $f(x)$ par λx et $g(x)$ par μx, on obtient
$$\mu \lambda x - \lambda \mu x = \alpha \mu x \quad \text{i.e.} \quad \alpha \mu x = 0_E.$$
Or $\alpha \neq 0$ et $\mu \neq 0$ donc $x = 0_E$. On a donc montré que $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Ker}(g - \mu \operatorname{Id}_E) \subset \{0_E\}$.

De plus, $0_E \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Ker}(g - \mu \operatorname{Id}_E)$ car $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Ker}(g - \mu \operatorname{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E en tant qu'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E.
En conclusion, $\boxed{\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Ker}(g - \mu \operatorname{Id}_E) = \{0_E\}.}$

(c) Montrons le résultat par récurrence, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}(n)$: « $f \circ g^n - g^n \circ f = n\alpha g^n$ ».
Initialisation On a $f \circ g^0 - g^0 \circ f = f \circ \operatorname{Id}_E - \operatorname{Id}_E \circ f = f - f = \theta = 0 \times \alpha \cdot g^0$. Donc $\mathcal{A}(0)$ est vraie.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{A}(n)$ est vraie. Alors, on a, en utilisant l'hypothèse de récurrence :
$$f \circ g^{n+1} = (f \circ g^n) \circ g = (g^n \circ f + n\alpha g^n) \circ g = g^n \circ (f \circ g) + n\alpha g^{n+1}.$$
Or par la relation $(*)$, $f \circ g = g \circ f + \alpha g$ donc
$$f \circ g^{n+1} = g^n \circ (g \circ f + \alpha g) + n\alpha g^{n+1} = g^{n+1} \circ f + \alpha g^{n+1} + n\alpha g^{n+1} = g^{n+1} \circ f + (n+1)\alpha g^{n+1}.$$
Donc $\mathcal{A}(n+1)$ est vraie.
Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathcal{A}(n)$ est vraie.

2. (a) La relation (*) s'écrit ici $f \circ g - g \circ f = g$ donc
$$f \circ (f \circ g - g \circ f) = f \circ g \quad \text{i.e.} \quad f^2 \circ g - f \circ g \circ f = f \circ g.$$
Comme $f^2 = f$ alors on obtient
$$f \circ g - f \circ g \circ f = f \circ g \quad \text{i.e.} \quad f \circ g \circ f = \theta.$$

(b) i. La relation (*) s'écrit ici $f \circ g - g \circ f = g$ donc
$$f \circ (f \circ g - g \circ f) = f \circ g \quad \text{i.e. } f^2 \circ g - f \circ g \circ f = f \circ g.$$
Comme $f \circ g \circ f = \theta$ alors $\boxed{f^2 \circ g = f \circ g}$.

ii. Supposons que l'endomorphisme g est surjectif. Soit $x \in E$. Comme g est surjectif, alors il existe $a \in E$ tel que $x = g(a)$. D'après la question précédente $f^2 \circ g(a) = f \circ g(a)$ i.e. $f^2(g(a)) = f(g(a))$. Ainsi $f^2(x) = f(x)$. Ceci est vrai pour tout $x \in E$ donc $\boxed{f^2 = f}$.

Problème 2 *Ecricome 2018, Voie T*

Partie I :

1. Le 2ème tirage s'effectue dans l'urne U si et seulement si l'on pioche une boule noire au 1er tirage qui s'effectue dans l'urne U (contenant deux boules blanches et une boule noire) donc :
$$P(U_2) = \frac{1}{3}$$

2. Sachant que le 2ème tirage s'effectue dans l'urne U, alors le 3ème tirage s'effectue dans l'urne U si et seulement si l'on pioche une boule noire au 2ème tirage donc :
$$P_{U_2}(U_3) = \frac{1}{3}$$
Sachant que le 2ème tirage s'effectue dans l'urne V, alors le 3ème tirage s'effectue dans l'urne U si et seulement si l'on pioche une boule blanche au 2ème tirage donc :
$$P_{\overline{U_2}}(U_3) = \frac{1}{4}$$
$(U_2, \overline{U_2})$ constitue un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} P(U_2) &= P(U_2) \times P_{U_2}(U_3) + P(\overline{U_2}) \times P_{\overline{U_2}}(U_3) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{18} + \frac{3}{18} \\ &= \frac{5}{18} \end{aligned}$$
En conclusion,
$$P(U_3) = \frac{5}{18}$$

3. (a) Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
Sachant que le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U alors le $(n+1)$-ième tirage s'effectue dans l'urne U si et seulement si l'on pioche une boule noire au n-ième tirage donc :
$$P_{U_n}(U_{n+1}) = \frac{1}{3}$$
Sachant que le n-ième tirage s'effectue dans l'urne V alors le $(n+1)$-ième tirage s'effectue dans l'urne U si et seulement si l'on pioche une boule blanche au n-ième tirage donc :
$$P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = \frac{1}{4}$$

   (b) Soit un entier $n \geqslant 2$.
$(U_n, \overline{U_n})$ constitue un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned} P(U_{n+1}) &= P(U_n) \times P_{U_n}(U_{n+1}) + P(\overline{U_n}) \times P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) \\ &= P(U_n) \times \frac{1}{3} + (1 - P(U_n)) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3}P(U_n) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}P(U_n) \\ &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) P(U_n) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n) \end{aligned}$$
Pour $n = 1$, on a $P(U_2) = \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_1)$. L'égalité est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) On reconnaît la relation de récurrence d'une suite airthmético-géométrique. Commençons par résoudre l'inéquation suivante. On a successivement :

$$\begin{aligned}\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha &\iff \alpha - \frac{1}{12}\alpha = \frac{1}{4}\\ &\iff \frac{11}{12}\alpha = \frac{1}{4}\\ &\iff \alpha = \frac{1}{4} \times \frac{12}{11}\\ &\iff \alpha = \frac{3}{11}\end{aligned}$$

On pose alors la suite $(w_n)_n$ définie par $w_n = P(U_n) - \alpha$, on montre alors que $w_{n+1} = \dfrac{1}{12}w_n$. Ainsi, la suite (w_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{12}$. D'après le cours, $w_n = w_1 \times q^{n-1}$. Or, $w_1 = P(U_1) - \alpha = 1 - \dfrac{3}{11} = \dfrac{8}{11}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$w_n = \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$$

Enfin, $w_n = P(U_n) - \alpha$ donc $P(U_n) = w_n + \alpha$ et par conséquent :

$$P(U_n) = \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{11}$$

(d) $\dfrac{1}{12} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(U_n) = \frac{3}{11}$$

Partie II

1. À l'issue du 1er tirage, on a pioché ou bien aucune ou bien une boule blanche. Ainsi, $X_1(\Omega) = \{0;1\}$. De plus, ce premier tirage s'effectuant dans l'urne U, on a $P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{3}$ et $P(X_1 = 1) = \dfrac{2}{3}$. D'où la loi de X_1 :

k	0	1
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Autrement dit, X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2}{3}$.

2. (a) Sachant que $[X_1 = 0]$ est réalisé (c'est-à-dire qu'on a pioché une boule noire dans l'urne U), on pioche dans l'urne U pour le 2-ième tirage, donc :

$$P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) = \frac{2}{3}$$

Sachant que $[X_1 = 1]$ est réalisé (c'est-à-dire qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U), on pioche dans l'urne V pour le 2-ième tirage, donc :

$$P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) = \frac{1}{4}$$

(b) À l'issue du 2-ième tirage, on a pioché ou bien aucune ou bien une ou bien deux boules blanches. Ainsi, $X_2(\Omega) = \{0;1;2\}$.

- On a : $P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$
- $X_1(\Omega) = \{0;1\}$ donc $\{[X_1 = 0], [X_1 = 1]\}$ constitue un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \times P_{[X_1=1]}(X_2 = 1)\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\\ &= \frac{2}{9} + \frac{1}{2}\\ &= \frac{4}{18} + \frac{9}{18}\\ &= \frac{13}{18}\end{aligned}$$

- On a : $P(X_2 = 2) = P(X_1 = 1) \times P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$.

D'où la loi de X_2 :

k	0	1	2
$P(X_2 = k)$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{13}{18}$	$\dfrac{1}{6}$

(c) On a : $E(X_2) = 0 \times \dfrac{1}{9} + 1 \times \dfrac{13}{18} + 2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{13}{18} + \dfrac{6}{18} = \dfrac{19}{18}$.

3. (a) On peut proposer la fonction suivante :

```python
import numpy.random as rd

def tirageU():
    if  rd.rand() < 2/3 :
        return 1
    else:
        return 0
```

(b) On peut proposer la fonction suivante :

```python
import numpy.random as rd

def tirageV():
    if  rd.rand() < 1/4 :
        return 1
    else:
        return 0
```

(c) On peut proposer la fonction suivante :

```python
def X2():
    res=tirageU()
    if  res == 1:
        res= res + tirageV()
    else:
        res= res + tirageU()
    return res
```

4. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. À l'issue du n-ième tirage, on a pioché entre 0 et n boules blanches, et les autres résultats entre 0 et n sont tous possibles, donc $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
L'événement $[X_n = 0]$ se réalise lorsque l'on n'a pioché que des boules noires (tous les tirages ont donc lieu dans l'urne U) donc :
$$P(X_n = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

5. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. À chaque tirage d'une boule blanche, on change d'urne donc si on a pioché un nombre pair de boules blanches au cours des n premiers tirages , on a changé un nombre pair de fois d'urnes et donc le tirage suivant se fera dans la première urne, à savoir l'urne U.

6. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. D'après la question **3**, on sait que $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$ donc $\{[X_n = k]\}_{k \in [\![0;n]\!]}$ constitue un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :
$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) \times P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = 1)$$
Or, il est clair que :
$$\forall k \geqslant 2 \qquad P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = 1) = 0$$
Par conséquent :
$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) \times P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1) \times P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1)$$
Or, $P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{2}{3}$ et $P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{3}{4}$. Ainsi, on a
$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4} \times P(X_n = 1) + \frac{2}{3} \times P(X_n = 0)$$

7. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. D'après les questions **5** et **3**, on a successivement :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \times P(X_{n+1}=1)\\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{3}{4} \times P(X_n=1) + \frac{2}{3} \times P(X_n=0)\right)\\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^{n} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times P(X_n=1) + \left(\frac{4}{3}\right)^{n} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \times P(X_n=0)\\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^{n} \times P(X_n=1) + \left(\frac{4}{3}\right)^{n} \times \frac{8}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n}\\
&= u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n}
\end{aligned}$$

8. (a) On peut proposer la fonction suivante :

```python
def suite1( n ):
    u= 8/9
    for k in range(1,n)
        u= u + (8/9)*(4/9)**k
    return u
```

(b) On peut proposer la fonction suivante :

```python
def suite1bis( n ):
    U=np.zeros(n)
    U[0]= 8/9
    for k in range(n-1)
        U[k+1]= U[k] + (8/9)*(4/9)**(k+1)
    return U
```

(c) On peut proposer le programme suivant :

```python
import matplotlib.pyplot
import numpy as np
abscisse=np.arange(1,31)
plt.plot(abscisse, suite1bis(30), '+')
```

9. (a) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $u_n = \dfrac{8}{5}\left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right)$ ».

Initialisation $(n=1)$:

D'une part, $u_1 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^1 \times P(X_1 = 1) = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{9}$.

D'autre part, $\dfrac{8}{5}\left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^1\right) = \dfrac{8}{5} \times \dfrac{5}{9} = \dfrac{8}{9}$.

Donc, $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que

$$u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

D'autre part, d'après la question **6**, on sait que

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{8}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)+\frac{8}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n \\
&= \frac{8}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)+\frac{8}{5}\times\frac{5}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n \\
&= \frac{8}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n+\frac{5}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n\right] \\
&= \frac{8}{5}\left[1-\frac{4}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n\right] \\
&= \frac{8}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, à savoir :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad u_n=\frac{8}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

(b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Par définition, $u_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n\times P(X_n=1)$ donc on a :

$$P(X_n=1)=\left(\frac{3}{4}\right)^n\times u_n$$

et en utilisant le résultat de la question **7.a)**, il vient :

$$\begin{aligned}
P(X_n=1) &= \left(\frac{3}{4}\right)^n\times\frac{8}{5}\times\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \\
&= \frac{8}{5}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n\times\left(\frac{4}{9}\right)^n\right] \\
&= \frac{8}{5}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}\right)^n\right] \\
&= \frac{8}{5}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

(c) On a $\frac{3}{4}\in]-1;1[$ et $\frac{1}{3}\in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}P(X_n=1)=0$$