Corrigé du DS n° 4

Exercice 1

1. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :
$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$
   (b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ alors par linéarité de f, on a :
$$f((x, y, z)) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = xe_1 - ye_1 + ze_3 = (x - y)e_1 + ze_3 = (x - y, 0, z).$$
2. Soit $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f((x, y, z)) = (0, 0, 0)$ soit le système :
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
soit $x = y$ et $z = 0$. Ainsi, on a :
$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y, z) \mid x = y,\ z = 0\} = \{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0)\right).$$
La famille $((1, 1, 0))$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ comme elle est constituée d'un unique vecteur non nul, elle est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base donc :
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}(e_1, -e_1, e_3) = \mathrm{Vect}(e_1, e_3).$$
La famille (e_1, e_3) est génératrice de $\mathrm{Im}(\mathrm{f})$, comme elle est de plus constitué de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre. Ainsi c'est une base $\mathrm{Im}(f)$.
3. L'application f est linéaire car c'est un endomorphisme. Montrons que $f \circ f = f$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :
$$(f \circ f)(x, y, z) = f((x - y, 0, z)) = (x - y - 0, 0, z) = (x - y, 0, z) = f((x, y, z)).$$
Ainsi f est bien un projecteur. C'est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 0), (0, 0, 1)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0)\right)$.

Problème 1 *ESCP voie T*

1. (a) Soit $x \in [0; 1]$. Alors :
$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 1 &\iff 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \quad \text{par croissance de } x \mapsto x^2 \\ &\iff -1 \leqslant -x^2 \leqslant 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^0 \quad \text{par croissance de } x \mapsto e^x \end{aligned}$$
   Or, $\mathrm{e}^{-1} > 0$ et $\mathrm{e}^0 = 1$. D'où, pour tout $x \in [0; 1]$,
$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1\,.$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0; 1]$, $x^n \geqslant 0$ et donc,
$$\forall x \in [0; 1]\,, \qquad 0 \leqslant x^n \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant x^n\,.$$

D'où, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \,.$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = I_n$ et $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1} \,.$$

(c) On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'où, d'après la question précédente, et d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

2. Une primitive de la fonction définie sur $[0;1]$ par $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$ est donnée par $x \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$. Ainsi,

$$I_1 = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathrm{e}} \,.$$

3. (a) Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^{n+1} & \qquad & u'(x) & = & (n+1)x^n \\ v'(x) & = & x\mathrm{e}^{-x^2} & & v(x) & = & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} \times x^{n+1}\right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^n \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2\mathrm{e}} + \frac{n+1}{2} I_n \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$nI_n = \frac{1}{e} + 2I_{n+2} - I_n \,.$$

Or, d'après la question 1.(c), on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. On a donc également, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{n+2} = 0$. Et donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{e}}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} = \frac{I_{2(n+1)+1}}{(n+1)!} = \frac{I_{2n+3}}{(n+1)!} \,.$$

Or, d'après la question 3.(a) et puisque $2n+3 = (2n+1)+2$, on a :

$$I_{2n+3} = \frac{(2n+1)+1}{2} I_{2n+1} - \frac{1}{2e} \,,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} I_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2} I_{2n+1} - \frac{1}{2e} \\ &= (n+1)I_{2n+1} - \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(n+1)I_{2n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{I_{2n+1}}{n!} - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!} \\ &= u_n - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

On montre la relation par récurrence, soit $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $u_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ ».

Initialisation ($n = 0$) : $u_0 = \dfrac{I_1}{0!} = I_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e}$ d'après la question 2.(b). Par ailleurs, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e}\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e}$. Donc, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. D'après ce qui précède, on a :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!}\,.$$

D'autre part, par hypothèse de récurrence, on sait que :

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,.$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, et ainsi, la proposition est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,.$$

(b) Par définition de u_n, on a $I_{2n+1} = n!u_n$. D'après l'expression de u_n obtenue à la question précédente, on en déduit :

$$I_{2n+1} = \frac{n!}{2} - \frac{n!}{2e}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,.$$

(c) Soit $k \geqslant 1$ un entier. En utilisant le résultat de la question précédente dans le cas $n = k-1$, on obtient (en prenant bien garde de changer le nom de la variable muette à l'intérieur de la somme) :

$$I_{2k-1} = \frac{(k-1)!}{2} - \frac{(k-1)!}{2e}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}\,.$$

Et donc,

$$\begin{aligned}
kI_{2k-1} &= \frac{k(k-1)!}{2} - \frac{k(k-1)!}{2e}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \\
&= \frac{k!}{2} - \frac{k!}{2e}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
kI_{2k-1} - \frac{1}{2e} &= \frac{k!}{2} - \frac{k!}{2e}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} - \frac{1}{2e} \\
&= \frac{k!}{2} - \frac{k!}{2e}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} + \frac{1}{k!}\right) \\
&= \frac{k!}{2} - \frac{k!}{2e}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \\
&= I_{2k+1}
\end{aligned}$$

(d) On complète la fonction Python comme suit :

```
def caclulint(n):
    I=1/2-1/(2*np.exp(1))
    for k in range(1,n+1)
        I=k*I-1/(2*np.exp(1))
    return I
```

Problème 2 *Ecricome 2015, voie E*

Partie I

1. On appelle succès l'événement : « obtenir Pile ». Sa probabilité est de $p = \frac{2}{3}$. Un lancer de pièce est donc une épreuve de Bernoulli. On répète cette épreuve de Bernoulli 3 fois de manière identique et indépendante. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 2/3).$$

Le joueur est déclaré vainqueur si il effectue un nombre pair de Pile soit 0 ou 2, ainsi :

$$P(A) = P([X = 0] \cup [X = 2]) = P([X = 0]) + P([X = 2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1 + 3 \times 4}{3^3} = \frac{13}{27}.$$

2. Pour chaque valeur de X, on a une valeur différente de G. Si $X = 0$, alors $G = 0$, si $X = 1$, alors on perd 10 euros et $G = -10$, si $X = 2$, alors on gagne 20 euros et $G = 20$. Enfin, si $X = 3$, on perd 30 euros et $G = -30$. Au final,

$$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$

On a ensuite :

$$P(G = 0) = P(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

$$P(G = 20) = P(X = 2) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(G = -30) = P(X = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$P(G = -10) = P(X = 1) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

3. On calcule l'espérance

$$\begin{aligned} E(G) &= -30P(G = -30) - 10P(G = -10) + 20P(G = 20) \\ &= -30P(X = 3) - 10P(X = 1) + 20P(X = 2) \\ &= -30\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 10 \times 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 20 \times 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{-60}{27} = \frac{-20}{9} \end{aligned}$$

On trouve donc que $E(G) < 0$ et le jeu est défavorable au joueur.

4. (a) On a la fonction Python suivante :

```
def loiX():
    x = 0
    for k in range(3):
        if rd.rand()< 2/3 :
            x = x+1
    return x
```

(b) On a la fonction Python suivante :

```
def loiG():
    x = loiX()
    if x==0 :
        G = 0
    elif x==1 :
        G = -10
    elif x==2 :
        G = 20
    else :
        G = -30
    return G
```

Partie II

1. (a) Si $Y = 1$, alors $Z = 1$. Si $Y = -1$, alors $Z = 0$. On a bien $Z(\Omega) = \{0; 1\}$. De plus,

$$P(Z = 1) = P(Y = 1) = P(X \in 2\mathbb{N}) = P(A),$$

et on a bien $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))}$.

(b) D'après la question précédente, $E(Z) = P(A)$ et $Y = 2Z - 1$. Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(Y) = E(2Z - 1) = 2E(Z) - 1 = 2P(A) - 1.$$

2. (a) On appelle succès l'événement : « obtenir Pile ». Sa probabilité est de p. Un lancer de pièce est donc une épreuve de Bernoulli. On répète cette épreuve de Bernoulli n fois de manière identique et indépendante. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, ainsi X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

(b) D'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned} E(Y) &= E((-1)^X) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

On utilise alors la formule du binôme

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p + 1 - p)^n = (1 - 2p)^n.$$

3. D'après les questions 1b. et 2b., on a

$$(1 - 2p)^n = E(Y) = 2P(A) - 1 \iff P(A) = \frac{(1 - 2p)^n + 1}{2}.$$

4. On résout

$$\begin{aligned} P(A) \geqslant \frac{1}{2} &\iff \frac{(1-2p)^n + 1}{2} \geqslant \frac{1}{2} \\ &\iff (1 - 2p)^n \geqslant 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } 1 - 2p \geqslant 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } p \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Partie III

1. On "gagne" 10 euros pour chaque *Pile* (compté avec X) affecté du signe donné par Y selon la parité de X, ou encore
$$G = 10XY = 10X(-1)^X.$$
Toujours avec le théorème de transfert, on obtient
$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{k=0}^{n} 10k(-1)^k P(X=k) \\ &= 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

2. Soit $k \in [\![1;n]\!]$.
$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

3. En utilisant le résultat de la question précédente, on a :
$$\begin{aligned} E(G) &= 10\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k} \\ &= 10n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-p)^k(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= 10n(-p)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-p)^j(1-p)^{n-1-j} \qquad \text{en posant } j = k-1 \\ &= -10np(1-2p)^{n-1} \qquad \text{en utilisant la formule du binôme de Newton.} \end{aligned}$$

4. On connaît déjà les conditions pour que $P(A) \geqslant 1/2$. Par ailleurs,
$$\begin{aligned} E(G) \leqslant 0 &\iff -10np(1-2p)^{n-1} \leqslant 0 \\ &\iff (1-2p)^{n-1} \geqslant 0 \\ &\iff 1-2p \geqslant 0 \text{ ou } n \text{ impair} \end{aligned}$$
Comme n ne peut pas être pair et impair à la fois, l'intersection des conditions précédentes donne bien
$$\begin{cases} P(A) \geqslant \frac{1}{2} \\ E(G) \leqslant 0 \end{cases} \iff p \leqslant \frac{1}{2}.$$

5. (a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur $[0; \frac{1}{2}]$. Le calcul donne
$$f'(x) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx).$$
On obtient le tableau de variations suivant

x	0		$1/2n$		$1/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(1/2n)$	$\searrow$	0

avec
$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

(b) La rentabilité est optimale pour le concepteur lorsque l'espérance du gain est minimale, ou, de manière équivalente, lorsque $f(p)$ est maximal sur $[0; 1/2]$. Il faut donc choisir

$$p = \frac{1}{2n}.$$

Problème 3

1. (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $((x,y,z),(x',y',z')) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f\left(\lambda(x,y,z)+(x',y',z')\right) &= f\left(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z'\right) \\ &= (\lambda x + x') - 2\left(\lambda y + y'\right) + 3\left(\lambda z + z'\right) \\ &= \lambda(x - 2y + 3z) + (x' - 2y' + 3z') \\ &= \lambda f(x,y,z) + f\left(x', y', z'\right). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. Et comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors f est bien $\boxed{\text{une forme linéaire}}$.
On montre exactement de la même manière que g est une forme linéaire.

(b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) \iff x - 2y + 3z = 0 \iff x = 2y - 3z$$

Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f) &= \left\{(2y - 3z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{y(2,1,0) + z(-3,0,1) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \operatorname{Vect}((2,1,0),(-3,0,1)) \end{aligned}$$

La famille $((2,1,0),(-3,0,1))$ est génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$ par définition, et elle est libre car les deux vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires. Donc la famille $((2,1,0),(-3,0,1))$ est $\boxed{\text{une base de } \operatorname{Ker}(f)}$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(g) \iff -x + 3y - 4z = 0 \iff x = 3y - 4z$$

Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(g) &= \left\{3y - 4z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{y(3,1,0) + z(-4,0,1) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \operatorname{Vect}((3,1,0),(-4,0,1)) \end{aligned}$$

La famille $((3,1,0),(-4,0,1))$ est génératrice de $\operatorname{Ker}(g)$ par définition, et elle est libre car les deux vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires. Donc la famille $((3,1,0),(-4,0,1))$ est $\boxed{\text{une base de } \operatorname{Ker}(g)}$.

Enfin, soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) &\iff \begin{cases} x - 2y + 3z &= 0 \\ -x + 3y - 4z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) = \{(-z,z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1,1,1) \mid z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((-1,1,1)).$$

La famille $((-1,1,1))$ est génératrice de $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$ par définition et elle est libre car elle est composée d'un seul vecteur, qui est non nul. Donc la famille $((-1,1,1))$ est $\boxed{\text{une base de } \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)}$.

(c) Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}$. Montrons l'inclusion réciproque.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x = f((x,0,0))$ donc $x \in \operatorname{Im}(f)$. Ainsi $\mathbb{R} \subset \operatorname{Im}(f)$ et on obtient l'égalité $\boxed{\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}}$.
De même, comme g est à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors $\operatorname{Im}(g) \subset \mathbb{R}$. Montrons l'inclusion réciproque.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Alors $x = g((-x,0,0))$ donc $x \in \operatorname{Im}(g)$. Ainsi $\mathbb{R} \subset \operatorname{Im}(g)$ et on obtient l'égalité $\boxed{\operatorname{Im}(g) = \mathbb{R}}$.

2. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in E \times E$. Alors

$$\Phi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(-1) = \lambda f(-1) + g(-1) = \lambda \Phi(f) + \Phi(g).$$

Donc Φ est linéaire, et comme Φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors Φ est bien $\boxed{\text{une forme linéaire}}$.

(b) Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.

- On a clairement $F \subset E$.
- Soit θ l'application nulle. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \theta(x) = 0 \cdot x + 0$. Donc $\theta \in F$.
- Soient f et g deux applications affines, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme f est affine, alors il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Comme g est affine, alors il existe deux réels a' et b' tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = a'x + b'$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x) = \lambda(ax + b) + (a'x + b') = (\lambda a + a')\, x + (\lambda b + b')\,.$$

Donc $\lambda f + g \in F$.

F est donc bien $\boxed{\text{un sous-espace vectoriel de } E}$.

Déterminons maintenant une base de $F \cap \mathrm{Ker}(\phi)$.

Soit $f \in F \cap \mathrm{Ker}(\phi)$. Alors il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Et

$$f \in \mathrm{Ker}(\Phi) \iff f(-1) = 0 \iff -a + b = 0 \iff a = b.$$

Ainsi

$$F \cap \mathrm{Ker}(\Phi) = \{x \longmapsto a(x+1) \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(h)$$

où h est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = x + 1$. Comme h n'est pas l'application nulle, alors la famille (h) est $\boxed{\text{une base de } \mathrm{Ker}(\Phi) \cap F}$.

(c) Soit $g \in G \cap \mathrm{Ker}(\phi)$. Alors il existe λ et μ deux réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lambda \arctan(x) + \mu x$. Et

$$g \in \mathrm{Ker}(\Phi) \iff h(-1) = 0 \iff -\lambda \cdot \frac{\pi}{4} - \mu = 0 \iff \mu = -\lambda \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi $g(x) = \lambda \arctan(x) - \lambda \frac{\pi}{4} x = \lambda \left(\arctan(x) - \frac{\pi}{4} x\right)$ et on a alors

$$G \cap \mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{Vect}(h)$$

où l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{4} x.$$

Par définition la famille (h) est génératrice de $G \cap \mathrm{Ker}(\Phi)$. Comme h n'est pas l'application nulle, en effet, $h(4) = \arctan(4) - \pi \leqslant -\frac{\pi}{2}$, alors la famille (h) est libre et donc c'est $\boxed{\text{une base de } G \cap \mathrm{Ker}(\Phi)}$.

(d) Comme Φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f l'application constante égale à α. Alors $f(-1) = \alpha$ i.e. $\Phi(f) = \alpha$. Donc $\alpha \in \mathrm{Im}(\Phi)$. Ainsi $\mathbb{R} \subset \mathrm{Im}(\Phi)$ et donc $\boxed{\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}}$.

3. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M' = (m'_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathrm{Tr}\,(\lambda M + M') = \sum_{i=1}^{n} [\lambda M + M']_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda m_{i,i} + m'_{i,i}\right) = \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} m'_{i,i}.$$

Ainsi $\mathrm{Tr}\,(\lambda M + M') = \lambda\,\mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}\,(M')$. Donc l'application trace est $\boxed{\text{linéaire}}$, et comme elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors Tr est bien $\boxed{\text{une forme linéaire}}$.

(b) Comme $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \cap \mathrm{Vect}\,(I_n)$ est une intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \cap \mathrm{Vect}\,(I_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donc $\{0_n\} \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \cap \mathrm{Vect}\,(I_n)$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \cap \mathrm{Vect}\,(I_n)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$. Et $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ donc $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Or

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}\,(\lambda I_n) = \sum_{i=1}^{n} [\lambda I_n]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda = \lambda n$$

Donc $\lambda n = 0$ i.e. $\lambda = 0$. Ainsi $M = 0 \cdot I_n = 0_n$. Donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \cap \mathrm{Vect}\,(I_n) \subset \{0_n\}$ i.e. $\boxed{\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \cap \mathrm{Vect}\,(I_n) = \{0_n\}}$.

(c) Comme Tr est à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) \subset \mathbb{R}$. Montrons l'inclusion réciproque.
Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit M la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf $m_{1,1}$ valant α. Alors

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = \alpha.$$

Donc $\alpha \in \mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$. Ainsi $\mathbb{R} \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$ et donc $\boxed{\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}}$.

(d) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, on rappelle que $AB = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ avec

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

On obtient alors :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} c_{j,j} = \mathrm{Tr}(BA)$$

(e) Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables. Alors il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible P tel que $N = P^{-1}MP$. Ainsi, d'après la question précédente,

$$\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}(MP)\right) = \mathrm{Tr}\left((MP)P^{-1}\right) = \mathrm{Tr}(M).$$

