Devoir surveillé n° 4

Durée : 4h

Les documents et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet de quatre pages est composé d'un exercice et de deux problèmes. Bon courage !

Exercice 1

1. **Questions de cours**
   (a) Soient I, J et K trois intervalles et soient deux fonctions dérivables $f : I \to J$ et $g : J \to K$. Donner alors l'expression de la dérivée de $g \circ f$.
   (b) Soient I et J deux intervalles et une fonction bijective $f : I \to J$, notons $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque.
      i. Sous quelle(s) condition(s), la bijection réciproque f^{-1} est-elle dérivable sur J ?
      ii. Donner l'expression de $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in J$?
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$, donner la valeur de $\cos^2(x) + \sin^2(x)$.
2. (a) Montrer que l'application $\sin$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.
   On note $\arcsin$ *sa bijection réciproque. Celle-ci est donc définie de* $[-1, 1]$ *dans* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Donner, en justifiant proprement, les valeurs de $\arcsin(0), \arcsin(1)$ et $\arcsin(-1)$.
   (c) Montrer que $\arcsin$ est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$, et que :
   $$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
3. (a) Montrer que l'application $\cos$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
   On note $\arccos$ *son application réciproque. Celle-ci est donc définie de* $[-1, 1]$ *dans* $[0, \pi]$.
   (b) Donner les valeurs de $\arccos(0)$, $\arccos(1)$ et $\arccos(-1)$.
   (c) Montrer que $\arccos$ est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$, et que :
   $$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
4. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
5. (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1, 1[$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan(x).$$
   Indication : On pourra introduire la fonction g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \arctan(x)$ *et calculer sa dérivée.*

6. (a) Vérifier que : $\forall x \in]0,1[, \quad \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} \in]0,1[$.

   (b) Montrer que : $\forall x \in [0,1], \quad \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = 2\arctan(\sqrt{x})$.

   Indication : On pourra introduire la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) - 2\arctan(\sqrt{x})$ et calculer sa dérivée.

7. Compléter le programme Python suivant permettant de tracer la courbe représentative de la fonction $\cos$ sur $[0,\pi]$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(...........):
    return ...........
xmax =....................
xmin =.......................
abscisse=np.arange(xmin, xmax, ................)
.....................................
```

   Comment pourrait-on se servir de cette courbe pour en déduire la courbe représentative de la fonction $\arccos$?

Problème 1

Partie I : Etude de trois exemples.

Les trois questions de cette partie I sont indépendantes.

1. Dans cette question, on se place sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'on définit les deux applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (x+y+z, 2x+y, -x+z) \quad \text{et} \quad g(x,y,z) = (x+y+z, -2x-2y-2z, x+y+z).$$

   (a) Montrer que f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, une base de $\mathrm{Im}(f)$, une base de $\mathrm{Ker}(g)$ et une base de $\mathrm{Im}(g)$.

   (c) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

   (d) En déduire qu'il existe un réel α que l'on déterminera tel que $f \circ g - g \circ f = \alpha g$.

2. Dans cette question, on se place sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où n est un entier supérieur ou égal à 2. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f_A(M) = AM$$

   (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et soit un réel α.

      i. Montrer que $f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = f_{AB-BA}$.

      ii. En déduire très soigneusement que

$$f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = \alpha f_B \Longleftrightarrow AB - BA = \alpha B.$$

3. Dans cette question on se place sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et l'on définit $S : E \to E$ et $T : E \to E$ par, pour tout $h \in E$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S(h)(x) = xh'(x) \quad \text{et} \quad T(h)(x) = x^4 h'(x).$$

   (a) Montrer que S et T sont des endomorphismes de E.

   (b) Vérifier que $\mathrm{Ker}(S) = \mathrm{Ker}(T) = \{h \in E \mid h \text{ est une application constante }\}$.

   (c) Montrer qu'il existe un réel α que l'on déterminera tel que $S \circ T - T \circ S = \alpha T$.

Partie II : Etude générale.

Dans cette partie, on revient à une étude générale. On se donne donc un espace vectoriel E, un réel α et deux endomorphismes de E notés f et g qui vérifient

$$f \circ g - g \circ f = \alpha g.$$

4. (a) i. Montrer que : $\forall x \in \operatorname{Ker}(g),\ f(x) \in \operatorname{Ker}(g)$.
   ii. Montrer que : $\forall x \in \operatorname{Ker}(f),\ g(x) \in \operatorname{Ker}(f - \alpha \operatorname{Id}_E)$.
   iii. Montrer que : $\forall x \in \operatorname{Im}(g),\ f(x) \in \operatorname{Im}(g)$.
   (b) On suppose dans cette question que $\alpha \neq 0$. Montrer que, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$,

$$\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Ker}(g - \mu \operatorname{Id}_E) = \{0_E\}$$

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f \circ g^n - g^n \circ f = n\alpha g^n.$$

5. Dans cette question on suppose que $\alpha = 1$. On note θ l'endomorphisme nul de E.
   (a) On suppose que $f^2 = f$. Montrer que $f \circ g \circ f = \theta$.
   (b) On suppose réciproquement que $f \circ g \circ f = \theta$.
   i. Montrer que $f^2 \circ g = f \circ g$.
   ii. En déduire que, si l'endomorphisme g est surjectif, alors $f^2 = f$.

Problème 2 *D'après Ecricome 2018, voie T*

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U ;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule **blanche** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **l'autre urne** ;
- si l'on pioche une boule **noire** lors d'un tirage, le suivant a lieu dans **la même** urne.

Partie I : Étude de l'urne du n-ième tirage

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U ». Puisque le premier tirage a lieu dans l'urne U, l'événement U_1 est certain : $P(U_1) = 1$.

1. Calculer $P(U_2)$.
2. Donner les valeurs de $P_{U_2}(U_3)$ et de $P_{\overline{U_2}}(U_3)$. En déduire $P(U_3)$.
3. (a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, que valent $P_{U_n}(U_{n+1})$ et $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$?
   (b) En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$P(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} P(U_n).$$

   (c) Déterminer alors la valeur de $P(U_n)$ en fonction de n.
   (d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(U_n)$.

Partie II : Étude du nombre de boules blanches

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. (a) Donner les valeurs de :

$$P_{[X_1=0]}(X_2 = 0)\,, \quad P_{[X_1=0]}(X_2 = 1)\,, \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 1)\,, \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 2)$$

   (b) En déduire la loi de X_2.
   (c) Vérifier que : $E(X_2) = \dfrac{19}{18}$.

3. **Python** Le but de cette question est de simuler la variable aléatoire X_2.
   (a) Recopier et compléter la fonction suivante appelée `tirageU` pour qu'elle simule un tirage dans l'urne U. On renverra 1 pour une boule blanche et 0 pour une boule noire.

```
import numpy.random as rd

def tirageU():
    if ........................ :
        return ...........
    else:
        return ............
```

   (b) Ecrire une fonction appelée `tirageV` similaire à la précédente pour simuler un tirage dans l'urne V.
   (c) Recopier et compléter la fonction suivante pour simuler la variable aléatoire X_2. On se servira des fonctions `tirageU` et `tirageV`.

```
def X2():
    res=tirageU()
    if ........................:
        res =........................
    else:
        res =........................
    return res
```

4. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $P(X_n = 0)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi, après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ième boule s'effectuera dans U.

   On admettra de même qu'après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre impair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ième boule s'effectuera dans V.
6. À L'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:
$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4} \times P(X_n = 1) + \frac{2}{3} \times P(X_n = 0) \qquad (R_1)$$
7. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose :
$$u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times P(X_n = 1)$$
   Déduire du résultat (R_1) que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$
8. **Python**
   (a) Recopier et compléter la fonction suivante pour que, étant donné un entier n, elle renvoie u_n.

```
def suite1(............):
    u =....................
    for .............................:
        u =..................
    return ....................
```

   (b) Modifier la fonction précédente pour que, étant donné un entier n, elle renvoie le vecteur $(u_1, \ldots, u_n)$ contenant les n premières valeurs de la suite u_n.
   (c) Ecrire un programme permettant de tracer les 30 premiers termes de la suite $(u_n)_n$.
9. (a) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:
$$u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$
   (b) En déduire, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $P(X_n = 1)$ en fonction de n.
   (c) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 1)$.