# Devoir Surveillé n° 4

*Durée : 4h*

Les documents et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. **Encadrez ou soulignez vos résultats.** En cas de non-respect de cette consigne, des points pourront être retirés.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet de quatre pages est composé d'un exercice et de trois problèmes. Bon courage !

## Exercice 1

On considère $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = -e_1, \quad f(e_3) = e_3.$$

1. (a) Décomposer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
   (b) En déduire que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
   $$f((x, y, z)) = (x - y, 0, z).$$
2. Déterminer le noyau et l'image de $f$ et donner une base de chacun d'eux.
3. Montrer que $f$ est un projecteur dont on précisera les caractéristiques.

## Problème 1 *ESCP voie T*

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

1. (a) Établir pour tout $x \in [0, 1]$, l'encadrement :
   $$0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$$
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n$, on a :
   $$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$
   (c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que :
   $$I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathrm{e}}$$

 

3. (a) En utilisant l'identité $x^{n+2}\mathrm{e}^{-x^2} = x^{n+1} \times x\mathrm{e}^{-x^2}$ et à l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel $n$, la relation :
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2\mathrm{e}}$$
   (b) Déterminer la limite de $nI_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
4. Pour tout entier naturel $n$, on pose :
$$u_n = \frac{I_{2n+1}}{n!}$$
   (a) Établir la relation :
$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2\mathrm{e}} \times \frac{1}{(n+1)!}$$
   En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
   (b) Donner, sous forme de somme, l'expression de $I_{2n+1}$ en fonction de $n$.
   (c) Vérifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :
$$I_{2k+1} = kI_{2k-1} - \frac{1}{2\mathrm{e}}$$
   (d) Compléter la fonction Python suivante qui étant donné un entier $n$ calcule la valeur de $I_{2n+1}$.

```
def calculint(......):
    I = ..............
    for k in range(...........):
        I = ..............................
     return .................
```

## Problème 2 *Ecricome, voie E*

Soit $n$ un entier naturel non nul. Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance $n$ fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant. Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à $p$ ($p \in ]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera $X$ la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et $G$ la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera $A$ l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire $G$ est positive.

### Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de $X$ et vérifier que $P(A) = \dfrac{13}{27}$.
2. Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de $G$.
3. Calculer l'espérance de $G$. Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. **Python**
   (a) Recopier et compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la loi de $X$.

```
def loiX():
    x = ......
    for k in range(.......):
        if rd.rand()...............  :
            x = .................
    return .......
```

(b) Recopier et compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la loi de $G$.
*On pourra utiliser la fonction* `loiX`

```
def loiG():
    x = ............
    if x==0 :
        G = ...........
    elif .............. :
        ..............
    elif .............. :
        ..............
    else :
        .............
    return .........
```

**Partie II**

Dans cette partie, on revient au cas général, où $n$ est entier naturel non nul et $p \in ]0,1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur $p$ et $n$ pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit $Y$ la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, $Y$ prend la valeur $1$ lorsque $X$ prend une valeur paire, et $Y$ prend la valeur $-1$ lorsque $X$ prend une valeur impaire.

1. (a) On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$. Déterminer $Z(\Omega)$, puis montrer que $Z$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
   (b) Démontrer que $E(Y) = 2P(A) - 1$.

2. (a) Donner la loi de $X$.
   (b) En déduire que l'on a également $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, puis que $E(Y) = (1-2p)^n$.

3. Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de $n$ et $p$.
4. Démontrer que
$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[ p \leq \frac{1}{2} \text{ OU « } n \text{ est pair »} \right]$$

**Partie III**

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $P(A) \geq \dfrac{1}{2}$ ), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $E(G) \leq 0$).

1. Exprimer $G$ en fonction de $X$ et $Y$. En déduire que $E(G) = 10 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k P(X = k)$.
2. Démontrer que $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.
3. Montrer que $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$
4. Démontrer alors que :
$$\begin{cases} P(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ E(G) \leqslant 0 \end{cases} \iff p \leqslant \frac{1}{2}$$
5. (a) Étudier la fonction $f$ définie sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \qquad f(x) = x(1-2x)^{n-1}$.
   (b) Pour une valeur de $n$ fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ ) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

## Problème 3

1. Dans cette question on se place sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'on pose $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les deux applications définies par :
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = x - 2y + 3z \quad \text{et} \quad g(x,y,z) = -x + 3y - 4z.$$
   (a) Montrer que $f$ et $g$ sont des formes linéaires.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, une base de $\mathrm{Ker}(g)$ et une base $\mathrm{de}\,\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$.
   *On raisonnera très soigneusement par double inclusion.*
2. Dans cette question on se place sur $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'on pose $\Phi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$\forall f \in E, \quad \Phi(f) = f(-1).$$
   (a) Montrer que $\Phi$ est une forme linéaire.
   (b) Soit $F$ le sous-ensemble de $E$ formé par les applications affines.
   *On rappelle qu'une application $f$ de $E$ est affine si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.*
   Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et déterminer une base de $F \cap \mathrm{Ker}(\Phi)$.
   (c) Soit $G = \mathrm{Vect}\left(\arctan, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\right)$. Déterminer une base de $G \cap \mathrm{Ker}(\Phi)$.
   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}$.
   *On raisonnera très soigneusement par double inclusion.*
3. Dans cette question on se place sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On définit l'application *trace*, $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$$
   où les $(m_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ désignent les coefficients de la matrice $M$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Tr}$ est une forme linéaire.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \cap \mathrm{Vect}\left(I_n\right) = \{0_n\}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$.
   *On raisonnera très soigneusement par double inclusion.*
   (d) Montrer que, pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$,
$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$
   (e) Deux matrices $A$ et $B$ sont dites **semblables** si il existe une matrice $P$ inversible telle que $A = P^{-1}BP$.
   Déduire de la question précédente que, si $M$ et $N$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables, alors $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(N)$.

 