Corrigé du DS n° 3

Exercice 1 *ESCP 2018, voie T*

1. (a) Les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant a $\mathcal{E}$ vérifient en particulier que $ad - bc = 0$ donc d'après le cours, elles ne sont pas inversibles.

(b) • Posons $a = 1, b = 1, c = -1$ et $d = -1$. Alors $a + d = 1 - 1 = 0$ et

$$ad - bc = 1 \times (-1) - 1 \times (-1) = -1 + 1 = 0 \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

• Posons $a = 1, b = -1, c = 1$ et $d = -1$. Alors $a + d = 1 - 1 = 0$ et

$$ad - bc = 1 \times (-1) - (-1) \times 1 = -1 + 1 = 0 \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

(c) • Posons $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Alors $ad - bc = 2 \times (-2) - 0 \times 0 = -4 \neq 0$ donc $S \notin \mathcal{E}$

• Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Alors $a + d = 2 + 2 = 4 \neq 0$ donc $P \notin \mathcal{E}$

On constate donc que la somme et le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ $\boxed{\text{n'appartiennent pas nécessairement à } \mathcal{E}.}$

(d) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{E}$. Alors $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$.
Or $M \in \mathcal{E}$ donc en particulier, on a $a + d = 0$ donc :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

De plus, $M \in \mathcal{E}$ donc en particulier, on a $ad - bc = 0$ donc $ad = bc$ donc :

$$a^2 + bc = a^2 + ad = a(a + d) = a \times 0 = 0$$

et

$$bc + d^2 = ad + d^2 = d(a + d) = d \times 0 = 0$$

Finalement, on a justifié que si $M \in \mathcal{E}$, alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.
Par suite, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $M^n = M^2 \times M^{n-2} = 0_2 \times M^{n-2} = 0_2$.
En conclusion, pour $n \geqslant 2$, $\boxed{M^n = 0_2}$.

2. (a) $1 \times 5 - (-2) \times 2 = 5 + 4 = 9 \neq 0$ donc la matrice A est $\boxed{\text{inversible}}$.

(b) Calculons K :

$$K = A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

On a alors en posant $a = -2$, $b = 2$, $c = -2$ et $d = 2$, $a + d = -2 + 2 = 0$ et $ad - bc = -2 \times 2 - 2 \times (-2) = -4 + 4 = 0$ donc $\boxed{K \in \mathcal{E}}$.

(c) Montrons ce résultat pa récurrence. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = 3^n I + n3^{n-1}K$.
Initialisation $(n = 0)$ On a d'une part $A^0 = I$ et $3^0 I + 0 \times 3^{-1}K = I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est initialisée.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (3^n I + n3^{n-1}K)A \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 3^n A + n3^{n-1}KA \\ &= 3^n(K+3I) + n3^{n-1}K(K+3I) \quad \text{car par définition de } K,\ A = K+3I \\ &= 3^n K + 3^{n+1}I + n3^{n-1}K^2 + n3^n K \\ &= 3^n K + 3^{n+1}I + n3^n K \quad \text{car } K^2 = 0 \text{ puisque } K \in \mathcal{E} \\ &= 3^{n+1}I + (n+1)3^n K \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.
Conclusion D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
D'après ce qui précède, $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} + n3^{n-1}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ d'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n - 2n \times 3^{n-1} & 2n \times 3^{n-1} \\ -2n \times 3^{n-1} & 3^n + 2n \times 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. (a) D'après la question 2.(b), on sait que $K \in \mathcal{E}$ donc d'après la question 1.(d), on a $K^2 = 0_2$ i.e. $(A-3I)^2 = 0_2$.
En développant, on obtient que $A^2 - 6A + 9I = 0_2$ donc $\alpha = -6$ et $\beta = 9$ conviennent.
Il reste à justifier l'unicité de α et β.
Soit donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0_2$ et soit $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha' A + \beta' I = 0_2$. Par soustraction, on obtient l'égalité :

$$(a - \alpha')\,A + (\beta - \beta')\,I = 0_2$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\alpha \neq \alpha'$. Alors on aurait $(\alpha - \alpha')\,A = (\beta' - \beta)\,I$ et puisque $\alpha - \alpha' \neq 0$, on aurait l'égalité $A = \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha - \alpha'} I$, donc A serait diagonale, ce qui est absurde. Donc $\alpha = \alpha'$ Par suite, $(\beta - \beta')\,I = 0_2$, ce qui impose $\beta - \beta' = 0$ i.e. $\beta = \beta'$.
En conclusion, $(\alpha, \beta) = (-6, 9)$ est $\boxed{\text{l'unique couple de réels tels que } A^2 + \alpha A + \beta I = 0_2}$.

(b) D'après la question précedente, $A^2 - 6A + 9I = 0$ donc $-A^2 + 6A = 9I$ et par suite $A(-A + 6I) = 9I$ donc $A\left[\dfrac{1}{9}(-A + 6I)\right] = I$ i.e. $A\left[3I - \dfrac{1}{6}A\right] = I$ ce qui suffit à prouver que la matrice A est inversible et que :

$$A^{-1} = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A$$

(c) $K = A - 3I$ donc $A = K + 3I$ donc d'après la question précédente

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A \\ &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}(K+3I) \\ &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}K - \frac{3}{9}I \\ &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}K - \frac{1}{3}I \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K$$

Pour $n = -1$, on a donc :

$$3^n I + n3^{n-1}K = 3^{-1}I + (-1) \times 3^{-2}K = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}K = A^{-1}$$

donc la formule $A^n = 3^n I + n3^{n-1}K$ reste valide pour $n = -1$.
Montrons qu'elle reste également valide pour tout $p \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$. Tout élément $p \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ s'écrit $p = -n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$.
Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$ ».

Initialisation $(n-1)$:
Nous venons de constater que $A^{-1} = 3^{-1}I - 3^{-2}K$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$ et on sait que $K^2 = 0_2$ donc :

$$\begin{aligned}
A^{-(n+1)} &= A^{-n-1} \\
&= A^{-n} \times A^{-1} \\
&= \left(3^{-n}I - n3^{-n-1}K\right)\left(3^{-1}I - 3^{-2}K\right) \\
&= 3^{-n-1}I - 3^{-n-2}K - n3^{-n-2}K + n3^{-n-3}K^2 \\
&= 3^{-n-1}I - (n+1)3^{-n-2}K \\
&= 3^{-(n+1)}I - (n+1)3^{-(n+1)-1}K
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.

Conclusion D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, à savoir

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$$

En conclusion, la formule $A^n = 3^nI + n3^{n-1}K$ est valide pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Problème 1

1. La fonction Python suivante permet de calculer S_n pour tout entier naturel n non nul.

```
def somme (n) :
    S=0
    for k in range (1, n+1) :
        S=S+k
    return S
```

2. Le cours assure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$, ce que l'on démontre aisément par récurrence *cf cours du Chapitre 3*
3. On a : $S_8 = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36 = 6^2$. Donc S_8 est bien $\boxed{\text{un carré parfait}}$.
4. Soient $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
S_n = m^2 &\iff \frac{n(n+1)}{2} = m^2 \\
&\iff 4n(n+1) = 8m^2 \\
&\iff 4n^2 + 4n - 8m^2 = 0 \\
&\iff 4n^2 + 4n + 1 - 8m^2 = 1 \\
&\iff (2n+1)^2 - 8m^2 = 1
\end{aligned}$$

5. (a) La fonction Python suivante calcule et renvoie a_n pour tout entier naturel n non nul.

```
def suite_a(n):
    a = 1
    a_next = 2
    for k in range(1,n-1):
        a_temp = a
        a = a_next
        a_next = 2*a_next + a_temp
    return a
```

(b) On peut reprendre le même programme adapté à la suite (b_n) :

```python
def suite_b(n):
    b = 1
    b_next = 3
    for k in range(1,n-1):
        b_temp = b
        b = b_next
        b_next = 2*b_next + b_temp
    return b
```

6. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $a_n \in \mathbb{N}^*$ ».
Montrons par récurrence double que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation $a_1 = 1 \in \mathbb{N}^*$ et $a_2 = 2 \in \mathbb{N}^*$ donc la propriété est vraie aux rangs 1 et 2 .

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$. Montrons alors qu'elle est vraie au rang $n+2$. Par définition, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ et par hypothèse de récurrence $a_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \in \mathbb{N}^*$ donc $a_{n+2} \in \mathbb{N}^*$. Donc la propriété $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion le principe de récurrence assure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} + a_n$, donc comme $a_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \in \mathbb{N}^*, a_{n+2} - a_{n+1} \in \mathbb{N}^*$, en particulier $a_{n+2} > a_{n+1}$. Ceci est également vrai pour $n = 0$ puisque $a_2 = 2 > 1 = a_1$.
Conclusion : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite $\boxed{\text{strictement croissante dont tous les termes sont entiers}}$.

8. (a) Calculons quelques termes, on conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, b_n$ est impair. On démontre cette conjecture par récurrence double. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « b_n est impair ».

Initialisation $(n = 1)$ et $(n = 2)$. On a $b_1 = 1$ et $b_2 = 3$ donc la propriété est vraie aux rangs 1 et 2.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies, montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, il existe deux entiers k et k' tels que $b_n = 2k+1$ et $b_{n+1} = 2k'+1$. On a alors :

$$b_{n+2} = 2(2k'+1) + 2k + 1 = 2(2k'+1+k) + 1 = 2K+1 \quad \text{avec } K \in \mathbb{N}.$$

Ainsi b_{n+2} est impair et la propriété est héréditaire.

Conclusion le principe de récurrence assure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}'(n)$ la propriété : « a_n est de la parité de n ».
Montrons par récurrence double que $\mathcal{P}'(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation $a_1 = 1$ est impair (comme 1) et $a_2 = 2$ est pair (comme 2) donc la propriété est vraie aux rangs 1 et 2 .

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$. Montrons alors qu'elle est vraie au rang $n+2$. Par définition, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, donc, comme $2a_{n+1}$ est pair, a_{n+2} est de même parité que a_n, donc de même parité que n par hypothèse de récurrence. Or n et $n+2$ sont de même parité donc la propriété $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion le principe de récurrence assure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n$ est de la parité de n.

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= b_{n+2} + a_{n+2}\sqrt{2} \\
&= 2b_{n+1} + b_n + (2a_{n+1} + a_n)\sqrt{2} \\
&= 2\left(b_{n+1} + a_{n+1}\sqrt{2}\right) + 2\left(b_n + a_n\sqrt{2}\right) \\
&= 2u_{n+1} + u_n
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n}$.

(b) Afin de déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = (1+\sqrt{2})^n$, on peut raisonner par récurrence double ou appliquer la méthode usuelle pour la détermination des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

10. On reproduit la démarche de la question précédente afin de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n = (1-\sqrt{2})^n$.

11. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n^2 - 2a_n^2 = \left(b_n + a_n\sqrt{2}\right)\left(b_n - a_n\sqrt{2}\right) = u_n v_n = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = ((1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}))^n = (-1)^n$$

12. (a) D'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$b_{2p}^2 - 2a_{2p}^2 = (-1)^{2p} = 1.$$
Or d'après la question 6 , a_{2p} et b_{2p} sont des entiers naturels pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Enfin d'après cette même question ces nombres a_{2p} et b_{2p} sont deux à deux distincts pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, puisque les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes.
Conclusion : il existe une infinité de couples (a, b) d'entiers naturels tels que $b^2 - 2a^2 = 1$.
(b) On reprend les nombres de la question précédente : d'après la question 7.(b-, les nombres a_{2p} sont pairs pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et les nombres b_{2p} sont impairs pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
Conclusion : il existe une infinité de couples (a, b) d'entiers naturels tels que a est pair, b impair et $b^2 - 2a^2 = 1$.
13. D'après la question 4, $S_n = m^2 \iff (2n+1)^2 - 8m^2 = 1$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 11.(a), $b_{2p}^2 - 2a_{2p}^2 = 1$.
Or d'après la question 11.(b), a_{2p} est pair et b_{2p} est impair.
Posons donc $n = \dfrac{b_{2p} - 1}{2}$ et $m = \dfrac{a_{2p}}{2}$.
La relation $b_{2p}^2 - 2a_{2p}^2 = 1$ devient $(2n+1)^2 - 8m^2 = 1$, donc $\boxed{S_n = m^2}$.
Ceci est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ donc il existe $\boxed{\text{une infinité d'entiers } n \in \mathbb{N}^*}$ tels que S_n soit un carré parfait.
14. (a) On utilise ce qu'on a démontré dans la question 12, on utilise donc les différentes valeurs de p.
On remarque que $b_4 = 17$, donc on obtient $n = \dfrac{b_4 - 1}{2} = 8$, c'est la valeur obtenue à la question 3 qui n'est pas assez grande.
On calcule donc b_6 qui vaut 99 . On obtient $n = \dfrac{b_6 - 1}{2} = 49$ qui est suffisamment grande. On a alors, d'après la question 12, $S_6 = \left(\dfrac{a_6}{2}\right)^2 = 35^2$.
Remarque : en effet $S_6 = \dfrac{49 \times 50}{2} = 1225 = 35^2$.
(b) Le script Python suivant répond à la question :

```
for k in range (10):
    n=( suite_b (2 *k)-1) /  2
    m=suite_a (2 * k) /  2
     print( n *(n+1) /  2, m ** 2)$
```

Problème 2

1. (a) Calculons $ad - bc$. On a : $ad - bc = 1 \times (-2) - 1 \times 1 = -3 \neq 0$. Ainsi la matrice P est inversible et
$$P^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
(b)
$$P^{-1}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
puis
$$P^{-1}AP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
donc on a bien $P^{-1}AP = D$.
2. (a) D'après la question précédente, $P^{-1}AP = D$ donc en multipliant par P à gauche, il vient $PP^{-1}AP = PD$, soit encore $AP = PD$ et en multipliant par Q à droite, on obtient $APP^{-1} = PDP^{-1}$, soit encore $A = PDP^{-1}$.
(b) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
Initialisation $(n = 0)$:
$A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $A^n = PD^nP^{-1}$. D'autre part, d'après ce qui précède $A = PDP^{-1}$. Donc on en déduit que :
$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

(c) La matrice D est diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) D'après ce qui précède, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

puis

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Or, $-2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1) \times 2 \times \frac{(-1)^n}{2^n} = (-1)^{n-1} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ donc on a bien :

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. Les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

Or, d'après l'énoncé :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 0 \qquad P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} \qquad P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$$

donc

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

De même, en utilisant à nouveau la formule des probabilités totales :

$$P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1})$$

Or, d'après l'énoncé :

$$P_{A_n}(B_{n+1}) = 1 \qquad P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2} \qquad P_{C_n}(B_{n+1}) = 1$$

donc

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n$$

Enfin, en utilisant à nouveau la formule des probabilités totales :

$$P(C_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1})$$

Or, d'après l'énoncé :

$$P_{A_n}(C_{n+1}) = 1 \qquad P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2} \qquad P_{C_n}(C_{n+1}) = 1$$

donc

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

4. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors d'après ce qui précède :

$$b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{4}b_n = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$$

5. (a) À l'instant 0, la mouche se trouve dans la pièce B donc $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$ et donc d'après la question **3**, on a $b_1 = a_0 + \frac{1}{2}b_0 + c_0 = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, $U_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors d'après **4** :

$$AU_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ b_n \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

Donc on a bien $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(b) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $U_n = A^n U_0$ ».
Initialisation $(n = 0)$:
$A^0 U_0 = I_2 U_0 = U_0$ donc $U_0 = A^0 U_0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $U_n = A^n U_0$. D'autre part, d'après la question précédente, on sait que $U_{n+1} = AU_n$, donc :

$$U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = A^n U_0 \,.$$

(c) Soit n dans $\mathbb{N}$. D'après la question précédente, ainsi que la question **2.d)** :

$$U_n = A^n U_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

i.e

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{\overset{***}{n-1}}\right) + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

donc

$$b_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

d'où

$$b_n = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

ce qui permet de conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n = \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

(d) Soit n dans $\mathbb{N}$. Si $n \geqslant 1$ alors $a_n = c_n = \frac{1}{4}b_{n-1} = \frac{1}{12}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$.

Si $n = 0$ alors $a_0 = c_0 = 0$ et $2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 - 2 = 0$ donc la formule précédente reste vraie pour $n = 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = c_n = \frac{1}{12}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

Problème 3

1. On a :
   - On sait que $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc par quotient $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.}$
   - On sait que par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc par passage à l'inverse $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$
   - On sait que $\lim_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^-$ donc par quotient $\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.}$
   - On sait que $\lim_{x\to 1^+} \ln(x) = 0^+$ donc par quotient $\boxed{\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.}$
2. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, les fonctions $x \to x$ et $x \to \ln(x)$ sont dérivables sur $\mathcal{D}$. De plus, $\ln(x) \neq 0$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$.
   La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$. On a : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Ainsi
   $$f'(x) = \frac{1 \times \ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}.$$
   Or $\ln(x)^2 > 0$ pour $x \in \mathcal{D}$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln(x) - 1$.
3. (a) Etudions le signe de $\ln(x) - 1$. On a pour $x \in \mathcal{D}$:
   $$\ln(x) - 1 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 1 \iff x \geqslant \mathrm{e}^1.$$
   On a alors le tableau de variations suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ 0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

   On a $f(\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}}{\ln(\mathrm{e})} = \dfrac{\mathrm{e}}{1} = \mathrm{e}.$

   (b) D'après ce qui précède, la fonction f est strictement croissante de $[\mathrm{e}; +\infty[$ dans $[\mathrm{e}; +\infty[$. De plus, la fonction f étant dérivable sur $\mathcal{D}$, elle est en particulier continue sur $[\mathrm{e}; +\infty[$. Ainsi d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[\mathrm{e}; +\infty[$ dans $[\mathrm{e}; +\infty[$.
4. (a) Soit $x \in \mathcal{D}$, on a :
   $$f(x) = x \iff \frac{x}{\ln(x)} = x \iff \frac{1}{\ln(x)} = 1 \quad \text{car } x \neq 0$$
   Ainsi :
   $$f(x) = x \iff \ln(x) = 1 \iff x = \mathrm{e}.$$
   Ainsi $\mathscr{S} = \{\mathrm{e}\}$.

   (b)
   $$f(x) - x \geqslant 0 \iff \frac{x}{\ln(x)} - x \geqslant 0 \iff \frac{x(1 - \ln(x))}{\ln(x)} \geqslant 0$$
   Dressons alors le tableau de signes de ce quotient :

x	0		1		e		$+\infty$
Signe de $1-\ln(x)$	||		$+$		0	$-$	
Signe de $\ln(x)$	||	$-$	0	$+$			
Signe de $\dfrac{x(1-\ln(x))}{\ln(x)}$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

5. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant \mathrm{e}$ ».

Initialisation $(n=0)$ $u_0 = 3 > \mathrm{e}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant \mathrm{e}$. Or on a montré que f est strictement croissante sur $[\mathrm{e};+\infty[$ donc on a :

$$f(u_n) \geqslant f(\mathrm{e}).$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$. On obtient donc

$$u_{n+1} \geqslant \mathrm{e}.$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$. On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n.$$

Or $f(x) - x \leqslant 0$ pour $x \geqslant \mathrm{e}$ et on vient de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \mathrm{e}$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite $(u_n)_n$ est donc décroissante.

(c) D'après les questions précédentes, la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par e donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite ℓ qui vérifie $\ell \geqslant \mathrm{e}$.
Montrons que $\ell = \mathrm{e}$.
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. De plus, la fonction f est continue sur $\mathcal{D}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.
La limite ℓ vérifie donc :

$$\ell = f(\ell).$$

Or on a montré à la question 4.(a) que l'équation $f(x) = x$ admettait une unique solution égale à e. Ainsi $\boxed{\ell = \mathrm{e}}$.

6. (a) D'après la question 2., on a pour $x \in \mathcal{D}$:

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}.$$

Calculons le terme $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{2}{\ln(x)}\right)^2$ et montrons qu'il est égal à $f'(x)$. On a pour $x \in [\mathrm{e};+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{\ln(x)-2}{\ln(x)}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\ln(x)^2 - (\ln(x)-2)^2}{\ln(x)^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\ln(x)^2 - \ln(x)^2 + 4\ln(x) - 4}{\ln(x)^2}\right) \qquad = \frac{1}{4}\left(\frac{4(\ln(x)-1)}{\ln(x)^2}\right) = \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2} = f'(x).
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{2}{\ln(x)}\right)^2}$.

(b) Pour $x \in [\mathrm{e};+\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc

$$|f'(x)| = f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2.$$

Or $-\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \leqslant 0$ donc

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4} \quad \text{pour } x \in [\mathrm{e};+\infty[.$$

7. On démontre ici ce qui était admis dans l'énoncé. La preuve s'appuie sur l'inégalité des accroissements finis vue dans le Chapitre 13.

La fonction f est continue et dérivable sur $[\mathrm{e};+\infty[$ et on a pour tout $x \in [\mathrm{e};+\infty[$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré que $u_n \in [\mathrm{e};+\infty[$. Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|f(u_n) - f(\mathrm{e})| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \mathrm{e}|,$$

or $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$, on a ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \mathrm{e}|.$$

(a) Montrons le résultat par récurrence.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $|u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}$ ».

Initialisation $(n=0)$ $u_0 = 3$ donc $|u_0 - \mathrm{e}| = 3 - \mathrm{e} \simeq 0.3$ et $\frac{1}{4^0} = 1$ ainsi $|u_0 - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^0}$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'après la question précédente, on a :

$$|u_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \mathrm{e}|$$

Or $|u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}$ par hypothèse de récurrence donc :

$$|u_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}$$

ainsi :

$$|u_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^{n+1}}.$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, à savoir :

$$|u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

(b) Remarquons que $\frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Comme $\frac{1}{4} \in]-1;1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0.$$

Or on a :

$$0 \leqslant |u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}$$

Ainsi d'après le théorème d'encadrement, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \mathrm{e}| = 0.$$

Ce qui nous permet de conclure que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}}$.

Problème 4

1. (a) Comme la suite (x_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k \leqslant x_n$. Soit, en sommant cette inégalité pour k variant de 1 à n :
$$\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_n$$
or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_n = nx_n$. Ainsi on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant nx_n$, soit $\boxed{y_n \leqslant x_n}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \\ &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n+1}x_{n+1} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n+1}x_{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(-y_n + x_{n+1}\right). \end{aligned}$$
Or d'après la question 1., $y_n \leqslant x_n$ mais comme la suite (x_n) est croissante, on a $x_n \leqslant x_{n+1}$ soit $y_n \leqslant x_{n+1}$. Ainsi comme $\dfrac{1}{n+1} > 0$, on en déduit que $y_{n+1} - y_n \geqslant 0$ et donc la suite (y_n) est $\boxed{\text{croissante}}$.

   (c) La suite (y_n) est croissante donc soit elle diverge vers $+\infty$ soit elle est convergente. Supposons qu'elle diverge vers $+\infty$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \leqslant x_n$, d'après le théorème de comparaison, cela impliquerait que (x_n) diverge vers $+\infty$ or c'est impossible car par hypothèse $(x_n$ converge vers un réel ℓ. Ainsi (y_n) est $\boxed{\text{convergente}}$.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$y_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} x_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} x_k\right) = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} x_k\right).$$
Comme la suite (x_n) est croissante, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $x_k \geqslant x_n$. Ainsi :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} x_k \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} x_n = \frac{1}{n} \times n \times x_n = x_n.$$
On en déduit donc l'inégalité voulue, $\boxed{y_{2n} \geqslant \dfrac{x_n + y_n}{2}}$.

   (e) En combinant les inégalités des questions 1.(a) et 1.(d), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{x_n + y_n}{2} \leqslant y_{2n} \leqslant x_{2n}.$$
Or la suite (x_n) converge vers ℓ donc la sous-suite (x_{2n}) également. On sait d'après la question 1.(c) que la suite (y_n) converge, notons ℓ' sa limite. La sous-suite (y_{2n}) converge également vers ℓ'. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient :
$$\frac{\ell + \ell'}{2} \leqslant \ell' \leqslant \ell$$
soit $\ell' \leqslant \ell$ et $\dfrac{\ell + \ell'}{2} \leqslant \ell'$ qui équivaut à $\ell \leqslant 2\ell' - \ell' \iff \ell \leqslant \ell'$. On obtient donc $\ell = \ell'$ et la suite (y_n) $\boxed{\text{converge vers } \ell}$.

2. (a) Montrons le résultat par récurrence. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in [0,1[$ ».

   Initialisation $(n = 0)$ par hypothèse $u_0 \in [0,1[$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Par HR, $u_n \in [0,1[$ donc $u_n^2 \in [0,1[$ par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$. Par suite $u_n^2 + 1 \in [1,2[$ et donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2} \in [\dfrac{1}{2}, 1[\subset [0,1[$. La propriété est donc héréditaire.

Conclusion D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1[$.

(b) Commençons par étudier la monotonie de la suite (u_n), soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante, de plus elle est majorée par 1 donc d'après le théorème de convergence monotone, elle $\boxed{\text{converge vers un réel } \ell}$.

(c) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. De plus, par opérations sur les limites, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n^2 + 1}{2} = \frac{\ell^2 + 1}{2}$.

Ainsi, en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$, on obtient :

$$\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2} \quad \text{soit} \quad 2\ell = \ell^2 + 1 \quad \text{soit} \quad (\ell - 1)^2 = 0.$$

Ainsi $\ell = 1$. La suite (u_n) $\boxed{\text{converge vers } 1}$.

(d) i. On a montré à la question 2.(a) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$. Ceci assure donc que la suite (w_n) est $\boxed{\text{bien définie}}$.

ii. On peut proposer les fonctions Python suivantes :

```python
def suite_u( n ):
    u = 1/2
    for k in range(n):
        u=(u**2+1)/2
    return u
def suite_w(n):
    return 1/(1-suite_u(n+1))-1/(1-suite_u(n))
```

iii. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_n = \frac{v_n - v_{n+1}}{(1 - u_{n+1})(1 - u_n)} = \frac{1 - u_n - 1 + u_{n+1}}{(1 - u_n)(1 - \frac{u_n^2+1}{2})} = \frac{\frac{u_n^2+1-2u_n}{2}}{(1 - u_n)(\frac{1-u_n^2}{2})} = \frac{(u_n - 1)^2}{(1 - u_n)^2(1 + u_n)} = \frac{1}{1 + u_n}.$$

iv. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, par opérations sur les limite, on montre que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{2}}$.

v. La suite (w_n) converge vers $\frac{1}{2}$ donc d'après le résultat de la question 1, la suite (z_n) converge également vers $\frac{1}{2}$.
Or par télescopage, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \frac{1}{nv_{n+1}} - \frac{1}{nv_1}$. Ainsi

$$\frac{1}{nv_{n+1}} = z_n + \frac{1}{nv_1}$$

On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{nv_{n+1}} = \frac{1}{2}$ et donc par passage à l'inverse : $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_{n+1} = 2$.
Il reste à remarquer que d'une part :

$$nv_n = nv_{n+1} \times \frac{v_n}{v_{n+1}}$$

et que d'autre part :

$$v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = \frac{1 - u_n^2}{2} = (1 - u_n)\frac{1 + u_n}{2} = v_n \times \frac{1}{2w_n}$$

soit $\frac{v_n}{v_{n+1}} = 2z_n$. On a alors :

$$nv_n = nv_{n+1} \times 2z_n$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2z_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_{n+1} = 2$, on en déduit donc que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = 2}$.