Corrigé du Devoir surveillé n° 3

Exercice 1

Partie A

1. La fonction rationnelle $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ car $x+1 \neq 0$ sur cet intervalle. De plus, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction d est dérivable sur $]-1,+\infty[$ par composition. On a pour $x \in]-1,+\infty[$,

$$d'(x) = \frac{1(x+1) - x(1)}{(x+1)^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{(x+1)^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\frac{1}{(x+1)^2} > 0$ et $e^{\frac{x}{x+1}} > 0$ donc $d'(x) > 0$ et la fonction d est $\boxed{\text{strictement croissante}}$ sur $]-1,+\infty[$.

2. On a $\lim\limits_{x \to -1^+} (x+1) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$, or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -1} d(x) = 0}$ par composée de limites.

On a pour $x \in]-1,+\infty[$, $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$. Ainsi par composée de limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}}$.

3. La fonction d est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$ et on a $\lim\limits_{x \to -1} d(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = \mathrm{e}$ donc pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\boxed{0 < d(x) < \mathrm{e}}$.

4. (a) On peut utiliser la bibliothèque `numpy` et pour cela on utilise la commande `import numpy as np`.

(b) On peut définir la fonction suivante :

```python
def d(x):
    return np.exp(x/(x+1))
```

(c) On peut utiliser la bibliothèque `matplotlib.pyplot` et pour cela on utilise la commande `import matplotlib.pyplot as plt`.

(d) On peut écrire le programme suivant qui utilise la fonction d définie à la question 4.(b).

```python
x=np.arange(0,10,0.01)
plt.plot(x,d(x))
```

Partie B

1. (a) On a déjà montré dans la Partie A que la fonction d était dérivable sur $]-1,+\infty[$, ainsi la fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. On a pour $x \in]-1,+\infty[$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

La fonction f' est elle-même dérivable sur $]-1,+\infty[$ car $x \mapsto (x+1)^2$ est dérivable et ne s'annule pas sur cet intervalle. On a pour $x \in]-1,+\infty[$,

$$f''(x) = -(-2)(x+1)^{-3} \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{1}{(x+1)^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} \left(\frac{2}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^4} \right)$$

soit

$$f''(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} \left(\frac{2(x+1) - 1}{(x+1)^4} \right) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} \left(\frac{2x+1}{(x+1)^4} \right)$$

(b) Lorsqu'on fait la limite en -1 de f', on a a priori une forme indéterminée. Ecrivons :

$$\frac{1}{(x+1)^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$$

On sait que $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$ et que $\lim\limits_{y\to-\infty} y\mathrm{e}^y = 0$ par croissance comparée. Ainsi par composée de limites, $\lim\limits_{x\to-1} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{x^2} \times \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} = 0$.
On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-1} f'(x) = 1-0 = 1}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0$, de plus, on a justifié à la question 2. de la partie A que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} = \mathrm{e}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} = 0$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1-0 = 1}$.

(c) Etudions le signe de $f"(x)$. On remarque que le signe de $f''(x)$ dépend uniquement de $2x+1$ car pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $(x+1)^4 > 0$ et $\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} > 0$. On a :

$$f''(x) > 0 \iff 2x+1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}.$$

De plus $f'(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{4}{\mathrm{e}}$ On en déduit le tableau de variations de f'.

x	-1		-$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f'	‖ 1	$\searrow$	$1-\frac{4}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	1

2. (a) On va appliquer le théorème de la bijection deux fois : une fois sur l'intervalle $]-1,-\frac{1}{2}]$ et une fois sur l'intervalle $[-\frac{1}{2},+\infty[$.
   - Sur $]-1,-\frac{1}{2}[$, la fonction f' est continue car dérivable sur $]-1,+\infty[$ d'après la question 1.(a), elle est également strictement décroissante donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]-1,-\frac{1}{2}]$ vers $f'(]-1,-\frac{1}{2}]) = [1-\frac{4}{\mathrm{e}},1[$. Or $1-\frac{4}{\mathrm{e}} < 0$ donc $0 \in [1-\frac{4}{\mathrm{e}},1[$, il admet donc un unique antécédent $\alpha \in]-1,-\frac{1}{2}[$ par f'. Ce qui signifie que l'équation $f'(x) = 0$ $\boxed{\text{admet une unique solution } \alpha \text{ sur l'intervalle }]-1,-\frac{1}{2}[}$.
   - Sur $]-\frac{1}{2},+\infty[$, la fonction f' est continue et strictement croissante donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]-\frac{1}{2},+\infty[$ vers $f'(]-\frac{1}{2},+\infty[) =]1-\frac{4}{\mathrm{e}},1[$. Comme $1-\frac{4}{\mathrm{e}} < 0$, $0 \in [1-\frac{4}{\mathrm{e}},1[$, il admet donc un unique antécédent dans $]-\frac{1}{2},+\infty[$. Or $f'(0) = 1-1 = 0$, c'est donc 0 qui est l'unique antécédent de 0 par f' sur cet intervalle, cela signifie que, l'équation $f'(x) = 0$ $\boxed{\text{admet 0 comme unique solution sur l'intervalle }]-\frac{1}{2},+\infty[}$.

   (b) Le réel α appartient à l'intervalle $]-1,-\frac{1}{2}[$.

3. (a) Etudions le signe de f'. On sait que f' est décroissante sur $]-1,-\frac{1}{2}[$ et s'annule en α donc $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \in]-1,\alpha]$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]\alpha,-\frac{1}{2}[$. De plus, f' est croissante sur $]-\frac{1}{2},+\infty[$ et s'annule en 0 donc $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in]-\frac{1}{2},0]$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in]0,+\infty[$. On en déduit les variations de f :
   - f est croissante sur $]-1,\alpha[$
   - f est décroissante sur $]\alpha,0]$
   - f est croissante sur $]0,+\infty[$

   (b) On a déjà montré que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} = \mathrm{e}$ ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

   On a également montré dans la Partie A que $\lim\limits_{x\to-1} e^{\frac{x}{x+1}} = 0$, de plus $\lim\limits_{x\to-1} x+1 = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 0}$.

   (c) On peut alors dresser le tableau de variations de f.

x	-1		α		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ 0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2

1. (a) Soit $n \geqslant 2$ un entier. Les événements A_n, B_n, C_n et D_n forment un système complet d'événements de probabilités non nulles. Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :
$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) + P_{D_n}(A_{n+1})P(D_n)\,.$$
Or, d'après l'énoncé, $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{3}$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = P_{D_n}(A_{n+1}) = 0$. Ainsi,
$$P(A_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n)\,.$$

(b) De même, on a :
$$P(B_{n+1}) = \frac{1}{2}P(C_n) + \frac{1}{3}P(D_n)\,;$$
$$P(C_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n)\,;$$
$$P(D_{n+1}) = \frac{1}{2}P(C_n) + \frac{2}{3}P(D_n)\,.$$

(c) À l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet A. Donc $P(A_0) = 1$, et $P(B_0) = P(C_0) = P(D_0) = 0$. Par ailleurs, d'après l'énoncé, à l'instant 1, la puce se trouve sur le sommet A avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet C avec une probabilité $\frac{1}{3}$, *i.e* $P(A_1) = \frac{2}{3}$ et $P(C_1) = \frac{1}{3}$. On a donc également $P(B_1) = P(D_1) = 0$. Dès lors, on a bien :
$$P(A_1) = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}P(A_0) + \frac{1}{2}P(B_0)\,;$$
$$P(B_1) = 0 = \frac{1}{2}P(C_0) + \frac{1}{3}P(D_0)\,;$$
$$P(C_1) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}P(A_0) + \frac{1}{2}P(B_0)\,;$$
$$P(D_1) = 0 = \frac{1}{2}P(C_0) + \frac{2}{3}P(D_0)\,.$$
Par ailleurs,
$$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) + P(C_1 \cap A_2) + P(D_1) \cap A_2)\,.$$
Comme, $P(B_1) = P(D_1) = 0$, on a $P(B_1 \cap A_2) = P(D_1 \cap A_2) = 0$. Par ailleurs,
$$P(A_1 \cap A_2) = P_{A_1}(A_2)P(A_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}\,;$$
$$P(C_1 \cap A_2) = P_{C_1}(A_2)P(C_1) = 0 \times \frac{1}{3} = 0\,.$$
Ainsi, $P(A_2) = \frac{4}{9}$. De même, on peut montrer que $P(B_2) = \frac{1}{6}$, $P(C_2) = \frac{2}{9}$ et $P(D_2) = \frac{1}{6}$. Et donc, on a bien :
$$P(A_2) = \frac{4}{9} = \frac{2}{3}P(A_1) + \frac{1}{2}P(B_1)\,;$$
$$P(B_2) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}P(C_1) + \frac{1}{3}P(D_1)\,;$$
$$P(C_2) = \frac{2}{9} = \frac{1}{3}P(A_1) + \frac{1}{2}P(B_1)\,;$$
$$P(D_2) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}P(C_1) + \frac{2}{3}P(D_1)\,.$$
Donc, les relations précédentes sont encore valables pour $n = 1$ et $n = 0$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les évènements A_n, B_n, C_n et D_n forment un système complet d'évènements, et donc

$$P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = 1\,.$$

2. D'après les relations établies précédemment, on a :

$$P(A_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n)\,;$$
$$P(B_{n+1}) = \frac{1}{2}P(C_n) + \frac{1}{3}P(D_n)\,;$$
$$P(C_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n)\,.$$

Or,

$$P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = 1\,.$$

Donc,

$$P(D_n) = 1 - P(A_n) - P(B_n) - P(C_n)\,.$$

Et donc,

$$P(B_{n+1}) = -\frac{1}{3}P(A_n) - \frac{1}{3}P(B_n) + \frac{1}{6}P(C_n) + \frac{1}{3}\,.$$

Dès lors,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(A_{n+1}) \\ P(B_{n+1}) \\ P(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) \\ -\frac{1}{3}P(A_n) - \frac{1}{3}P(B_n) + \frac{1}{6}P(C_n) + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) \end{pmatrix}\,.$$

Or,

$$\begin{aligned} AU_n + B &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) \\ -\frac{1}{3}P(A_n) - \frac{1}{3}P(B_n) + \frac{1}{6}P(C_n) + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) \end{pmatrix} \\ &= U_{n+1}\,. \end{aligned}$$

3. (a) Posons $L = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} L = AL + B \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{cases} a = \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b \\ b = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c + \frac{1}{3} \\ c = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b = 0 \\ \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b - \frac{1}{6}c = \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On résout ce système par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b = 0 \\ \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b - \frac{1}{6}c = \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + c = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b = 0 \\ \frac{5}{6}b + \frac{5}{6}c = \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + c = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{cases} \frac{1}{3}a - & \frac{1}{2}b & & = & 0 \\ & \frac{5}{6}b + & \frac{5}{6}c & = & \frac{1}{3} \\ & -b + & c & = & 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{6}{5}L_2} \begin{cases} \frac{1}{3}a - & \frac{1}{2}b & & = & 0 \\ & \frac{5}{6}b + & \frac{5}{6}c & = & \frac{1}{3} \\ & & +2c & = & \frac{2}{5} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} a = & \frac{3}{10} \\ b = & \frac{1}{5} \\ c = & \frac{1}{5} \end{cases}$$

Et donc, l'unique vecteur L qui vérifie $L = AL + B$ est $L = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

(b) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $U_n = A^n(U_0 - L) + B$ ».
Initialisation $(n = 0)$:
$A^0(U_0 - L) + L = I_3(U_0 - L) + L = U_0 - L + L = U_0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. D'après ce qui précède, on sait que $L = AL + B$ et que $U_{n+1} = AU_n + B$. D'autre part, par hypothèse de récurrence, on sait que $U_n = A^n(U_0 - L) + L$ donc on en déduit que :

$$U_{n+1} = AU_n + B = A\left(A^n(U_0 - L) + L\right) + B = A^{n+1}(U_0 - L) + AL + B = A^{n+1}(U_0 - L) + L\,.$$

Donc, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$ à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad U_n = A^n(U_0 - L) + L$$

4. (a) Calculons RQ :

$$RQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10I_3\,.$$

Ainsi, R est inversible, et

$$R^{-1} = \frac{1}{10}Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}\,.$$

(b) Calculons $CR - RD$:

$$\begin{aligned} CR - RD &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$ » .
Initialisation $(n = 0)$: $A^0 = I_3$ et $\left(\frac{1}{6}\right)^0 RD^0R^{-1} = 1 \times RI_3R^{-1} = RR^1 = I_3$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. D'après ce qui précède, $CR = RD$ et R est inversible, donc $C = RDR^{-1}$. Par ailleurs, $C = 6A$ donc $A = \dfrac{1}{6}RDR^{-1}$. D'autre part, par hypothèse de récurrence, on sait que $A^n = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$, donc on en déduit que :

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n \times A = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1} \times \frac{1}{6}RDR^{-1} &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{1}{6} \times RD^nR^{-1}RDR^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} RD^nI_3DR^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} RD^{n+1}R^{-1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}.$$

5. Calculons A^n grâce à la formule obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned}
A^n &= \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\\ -1 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & (-2)^n & 0\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & (-2)^n & 3^{n+1}\\ -1 & (-2)^{n+1} & -3^n\\ -1 & -(-2)^{n+1} & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} -\frac{(-2)^n}{5}+\frac{2\times 3^{n+1}}{5} & -\frac{1}{2}+\frac{(-2)^{n+1}}{5}+\frac{3^{n+2}}{10} & -\frac{1}{2}+\frac{(-2)^n}{5}+\frac{3^{n+1}}{10}\\ -\frac{(-2)^{n+1}}{5}-\frac{2\times 3^n}{5} & \frac{1}{2}+\frac{(-2)^{n+2}}{5}-\frac{3^{n+1}}{10} & \frac{1}{2}+\frac{(-2)^{n+1}}{5}-\frac{3^n}{10}\\ \frac{(-2)^{n+1}}{5}+\frac{2\times 3^n}{5} & \frac{1}{2}-\frac{(-2)^{n+2}}{5}+\frac{3^{n+1}}{10} & \frac{1}{2}-\frac{(-2)^{n+1}}{5}+\frac{3^n}{10}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
U_n &= A^n(U_0-L)+L\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} -\frac{(-2)^n}{5}+\frac{2\times 3^{n+1}}{5} & -\frac{1}{2}+\frac{(-2)^{n+1}}{5}+\frac{3^{n+2}}{10} & -\frac{1}{2}+\frac{(-2)^n}{5}+\frac{3^{n+1}}{10}\\ -\frac{(-2)^{n+1}}{5}-\frac{2\times 3^n}{5} & \frac{1}{2}+\frac{(-2)^{n+2}}{5}-\frac{3^{n+1}}{10} & \frac{1}{2}+\frac{(-2)^{n+1}}{5}-\frac{3^n}{10}\\ \frac{(-2)^{n+1}}{5}+\frac{2\times 3^n}{5} & \frac{1}{2}-\frac{(-2)^{n+2}}{5}+\frac{3^{n+1}}{10} & \frac{1}{2}-\frac{(-2)^{n+1}}{5}+\frac{3^n}{10}\end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} -\frac{(-2)^n}{5}+\frac{2\times 3^{n+1}}{5} & -\frac{1}{2}+\frac{(-2)^{n+1}}{5}+\frac{3^{n+2}}{10} & -\frac{1}{2}+\frac{(-2)^n}{5}+\frac{3^{n+1}}{10}\\ -\frac{(-2)^{n+1}}{5}-\frac{2\times 3^n}{5} & \frac{1}{2}+\frac{(-2)^{n+2}}{5}-\frac{3^{n+1}}{10} & \frac{1}{2}+\frac{(-2)^{n+1}}{5}-\frac{3^n}{10}\\ \frac{(-2)^{n+1}}{5}+\frac{2\times 3^n}{5} & \frac{1}{2}-\frac{(-2)^{n+2}}{5}+\frac{3^{n+1}}{10} & \frac{1}{2}-\frac{(-2)^{n+1}}{5}+\frac{3^n}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{7}{10}\\ -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} -\frac{(-2)^n}{10}+\frac{3^{n+1}}{5}+\frac{1}{5}\\ -\frac{(-2)^{n+1}}{10}-\frac{3^n}{5}-\frac{1}{5}\\ -\frac{(-2)^{n+1}}{10}+\frac{3^n}{5}-\frac{1}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}\left(\frac{-2}{6}\right)^n+\frac{3}{5}\left(\frac{3}{6}\right)^n+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\\ -\frac{2}{10}\left(\frac{-2}{6}\right)^n-\frac{1}{5}\left(\frac{3}{6}\right)^n-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\\ \frac{2}{10}\left(\frac{-2}{6}\right)^n+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{6}\right)^n-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{6}$, $\frac{-2}{6}$, $\frac{3}{6} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{6}\right)^n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^n=0$. Donc :

$$U = \lim_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix}\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Enfin, on a vu à la question 1.(d) que $P(A_n)+P(B_n)+P(C_n)+P(D_n)=1$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} P(D_n) = 1-\lim_{n\to+\infty}(P(A_n)+P(B_n+P(C_n)) = 1-\frac{3}{10}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}.$$

Problème 1

Partie I : Quelques résultats généraux

1. Montrons par récurrence double le résultat. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant n$ ».

   Initialisation $u_1 = 1 \geqslant 1, u_2 = 2 \geqslant 2$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$, montrons la au rang $n+2$.
   Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ donc d'après l'hypothèse de récurrence :

   $$u_{n+2} \geqslant n + 1 + n = 2n + 1$$

   Or $n \geqslant 1 \Longrightarrow 2n \geqslant n+1 \Longrightarrow 2n+1 \geqslant n+2$ donc on a bien : $u_{n+2} \geqslant n+2$, ce qui assure que la propriété est vraie au rang $n+2$.

   Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geqslant n$.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, le théorème de comparaison assure que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

2. Montrons par récurrence double le résultat. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n$ ».

   Initialisation D'une part, on a : $u_0 = 1$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^0$. D'autre part, on a : $u_1 = 1$ donc $0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{7}{4} = \left(\frac{7}{4}\right)^1$.
   La propriété est donc vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$, montrons la au rang $n+2$.
   Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

   $$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}.$$

   Or

   $$\left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} = \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(1 + \frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{11}{4} = \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{44}{16}$$

   Donc

   $$\left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}.$$

   Ainsi

   $$\left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}.$$

   On a donc bien : $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$, ce qui assure que la propriété est vraie au rang $n+2$.

   Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n$

3. Montrons le résultat par récurrence simple. Posons pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $\sum\limits_{k=1}^{n} u_{2k-1} = u_{2n} - 1$ ».

   Initialisation $\sum\limits_{k=1}^{1} u_{2k-1} = u_1 = 1 = u_2 - 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose la propriété vraie au rang n, montrons la au rang $n+1$.

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} u_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} u_{2k-1} + u_{2(n+1)-1} \\ &= u_{2n} - 1 + u_{2n+1} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= u_{2n+2} - 1 \quad \text{d'après la définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

   La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

   Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} u_{2k-1} = u_{2n} - 1$.

4. Montrons le résultat par récurrence simple. Pour $\forall n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: « $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$ ».

Initialisation $\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 = u_2 - 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose la propriété vraie au rang n, montrons la au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} u_k &= \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1} \\ &= u_{n+2} - 1 + u_{n+1} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= u_{n+3} - 1 \text{ d'après la définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{s_n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n} \frac{u_p}{2^{p+1}} = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_p}{2^{p+2}} = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{p+2} - u_{p+1}}{2^{p+2}}$$

par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc :

$$\frac{s_n}{2} = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{p+2}}{2^{p+2}} - \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{p+1}}{2^{p+2}} = 2\sum_{p=0}^{n} \frac{u_{p+2}}{2^{p+3}} - \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{p+1}}{2^{p+2}}$$

Par changement d'indice dans chacune des sommes, on a donc :

$$\frac{s_n}{2} = 2\sum_{p=2}^{n+2} \frac{u_p}{2^{p+1}} - \sum_{p=1}^{n+1} \frac{u_p}{2^{p+1}} = 2\left(s_{n+2} - \frac{u_0}{2^1} - \frac{u_1}{2^2}\right) - \left(s_{n+1} - \frac{u_0}{2^1}\right)$$

En conclusion, $\frac{s_n}{2} = 2s_{n+2} - \frac{3}{2} - s_{n+1} + \frac{1}{2} = 2s_{n+2} - s_{n+1} - 1$. Ainsi, $\boxed{\frac{s_n}{2} = 2s_{n+2} - s_{n+1} - 1}$.

Partie II : Lien avec les matrices

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n + u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

7. Montrons le résultat par récurrence. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $X_n = A^n X_0$ ».

Initialisation Par convention $A^0 = I_2$ donc $A^0 X_0 = X_0$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}X_{n+1} &= AX_n \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= A \times A^n X_0 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} X_0\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

8. (a)

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

Ainsi, φ est $\boxed{\text{solution de l'équation } x^2 = x + 1.}$

Remarque : on pouvait aussi résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ avec la méthode usuelle de résolution des équations du second degré.

(b) Deux méthodes sont possibles pour trouver une relation entre $\frac{1}{\varphi}$ et φ.

Méthode 1 :

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2} = \varphi - 1$$

Méthode 2

On a $\varphi^2 = \varphi + 1$ donc en divisant par $\varphi > 0$ on a :

$$\varphi = \frac{\varphi+1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

donc $\boxed{\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1}$.

On en déduit que :

$$\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2 = (1-\varphi)^2 = 1 - 2\varphi + \varphi^2 = 1 - 2\varphi + \varphi + 1 = 2 - \varphi = 1 - \varphi + 1 = -\frac{1}{\varphi} + 1$$

Ainsi $-\frac{1}{\varphi}$ est aussi $\boxed{\text{racine de l'équation } x^2 = x + 1}$.

9. (a) P est une matrice 2×2, on calcule donc $ad - bc$ qui vaut $\bar{\varphi} - \varphi = -\sqrt{5} \neq 0$. Donc P est inversible d'inverse

$$P^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \bar{\varphi} & -1 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\bar{\varphi} & 1 \\ \varphi & -1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\bar{\varphi} & 1 \\ \varphi & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \bar{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 1-\bar{\varphi} \\ -1 & \varphi - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \bar{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1+\varphi-\varphi\bar{\varphi} & 1+\bar{\varphi}-\bar{\varphi}^2 \\ -1+\varphi^2-\varphi & -1+\varphi\bar{\varphi}-\bar{\varphi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or φ et $\bar{\varphi}$ sont solutions de l'équation $x^2 = x + 1$ donc $-1 + \varphi^2 - \varphi = 1 + \bar{\varphi} - \bar{\varphi}^2 = 0$. De plus par définition de $\bar{\varphi}$ on a $\varphi\bar{\varphi} = -1$. Donc :

$$P^{-1}AP = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2+\varphi & 0 \\ 0 & -2-\bar{\varphi} \end{pmatrix}$$

Enfin :

$$\frac{2+\varphi}{\sqrt{5}} = \frac{2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}+5}{10} = \varphi$$

On vérifie de même que $\frac{-2-\bar{\varphi}}{\sqrt{5}} = \bar{\varphi}$. Ainsi $\boxed{P^{-1}AP = D}$ où $D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \bar{\varphi} \end{pmatrix}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

Initialisation Par convention $A^0 = D^0 = I_2$ donc

$$PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0.$$

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times PD^nP^{-1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1} && \text{car } D = P^{-1}AP \text{ donc } A = PDP^{-1} \\ &= PDI_2D^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(d) La matrice D étant diagonale, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \varphi & \bar{\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi^n & 0\\ 0 & \bar{\varphi}^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\bar{\varphi} & 1\\ \varphi & -1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \varphi & \bar{\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\bar{\varphi}\varphi^n & -\varphi^n\\ \varphi\bar{\varphi}^n & \bar{\varphi}^n\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \varphi & \bar{\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi^{n-1} & \varphi^n\\ -\bar{\varphi}^{n-1} & -\bar{\varphi}^n\end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \varphi\bar{\varphi} = -1\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi^{n-1} - \bar{\varphi}^{n-1} & \varphi^n - \bar{\varphi}^n\\ \varphi^n - \bar{\varphi}^n & \varphi^{n+1} - \bar{\varphi}^{n+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 7 ,

$$\begin{aligned} X_n &= A^nX_0\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi^{n-1} - \bar{\varphi}^{n-1} & \varphi^n - \bar{\varphi}^n\\ \varphi^n - \bar{\varphi}^n & \varphi^{n+1} - \bar{\varphi}^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi^{n-1} - \bar{\varphi}^{n-1} & \varphi^n - \bar{\varphi}^n\\ \varphi^n - \bar{\varphi}^n & \varphi^{n+1} - \bar{\varphi}^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

En conservant uniquement la première ligne, on a donc :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n-1} - \bar{\varphi}^{n-1} + \varphi^n - \bar{\varphi}^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n-1}(1+\varphi) - \bar{\varphi}^{n-1}(1+\bar{\varphi})\right)$$

Or φ et $\bar{\varphi}$ sont solutions de $x^2 = 1 + x$ donc :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n-1}\varphi^2 - \bar{\varphi}^{n-1}\bar{\varphi}^2\right)$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \bar{\varphi}^{n+1}\right)}$.

Partie III : Z-décomposition

11. On calcule les premières valeurs de u_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

12. (a) D'après la définition de la Z-décomposition, on ne peut avoir deux termes consécutifs de la suite (u_n) (c'est le sens de la contrainte : $\forall i \in [\![1, k-1]\!]$, $c_i + 1 < c_{i+1}$). Donc $u_1 + u_2 + u_3$ n'est pas la Z-décomposition de 6. En revanche $u_1 + u_4$ convient puisque $1 \leqslant 1 < 4$.

(b) $5 = u_4$ est la Z-décomposition de 5 .

(c) $35 = 1 + 34 = u_1 + u_8$ est la Z-décomposition du nombre 35 car $1 \leqslant 1 < 8$.

(d) $130 = 89 + 34 + 5 + 2 = u_{10} + u_8 + u_4 + u_2$ est la Z-décomposition du nombre 130 car $1 \leqslant 2 < 4 < 8 < 10$.

13. (a) n est fixé et d'après la question 1, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ donc par définition de la divergence d'une suite vers $+\infty$, il existe un entier naturel J non nul tel que : $\boxed{\forall i \geqslant J, \quad u_i \geqslant n+1}$.

(b) $u_1 = 1 \leqslant n$ car $n \in \mathbb{N}^*$, donc $1 \in A_n$.
De plus, d'après la question précédente : $\forall i \geqslant J$, $u_i \geqslant n+1$. Donc pour tout $i \geqslant J, i \notin A_n$. Donc $A_n \subset [1, J-1]$, donc A_n $\boxed{\text{contient au plus } J-1 \text{ éléments}}$.

(c) $1 \in A_n$ donc $1 \leqslant \max(A_n)$, autrement dit $j \geqslant 1$.
De plus par définition d'un maximum, $j \in A_n$, donc par définition de $A_n, u_j \leqslant n$.
Enfin $j + 1 \notin A_n$ car $j + 1 > j = \max(A_n)$, donc, par définition de A_n, $n < u_{j+1}$.
On a donc bien montré les inégalités voulues.

(d) D'après la question précédente, $n < u_{j+1}$, donc $n - u_j < u_{j+1} - u_j$.
Or par définition de (u_n), $u_{j+1} - u_j = u_{j-1}$ donc on a bien : $\boxed{n - u_j < u_{j-1}}$.

14. **Python** On peut écrire la fonction suivante :

```
def fibonacci(n):
    if n==0 :
        return 1
    elif n==1 :
        return 1
    else :
        u=1
        v=1
        for k in range (2,n+1) :
            w = u+v
            u=v
            v=w
        return v
```

