Devoir surveillé n° 3

Durée : 4h

Les documents et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet de quatre pages est composé d'un exercice et de quatre problèmes. Bon courage !

Exercice 1 *ESCP 2018, voie T*

Soit a, b, c et d des réels et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices carrées $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2 qui vérifient les deux conditions :

$$a + d = 0 \quad \text{et} \quad ad - bc = 0.$$

1. (a) Les matrices de $\mathcal{E}$ sont-elles inversibles ?
   (b) Vérifier que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{E}$.
   (c) En déduire que la somme et le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ n'appartiennent pas nécessairement à $\mathcal{E}$.
   (d) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{E}$. Déterminer la matrice M^2 et en déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, la matrice M^n.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice identité d'ordre 2.

2. (a) Justifier l'inversibilité de la matrice A
   (b) On pose : $K = A - 3I$. Vérifier que la matrice K appartient à $\mathcal{E}$
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad A^n = 3^n I + n3^{n-1}K$. En déduire les quatre coefficients de la matrice A^n.
3. (a) Établir l'existence d'un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ que l'on déterminera, pour lequel $A^2 + \alpha A + \beta I$ est la matrice nulle.
   (b) Retrouver le fait que la matrice A est inversible et montrer que $\quad A^{-1} = \dfrac{2}{3}I - \dfrac{1}{9}A$.
   (c) En déduire que $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{3}I - \dfrac{1}{9}K$ et vérifier que la formule trouvée à la question 2.(c) pour tout $n \in \mathbb{N}$ est encore valide pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Problème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante permettant de calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

```
def somme(..........):
    S = ....................
    for k ..................
        ....................
    return ................
```


2. Rappeler la valeur de S_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer ce résultat.
3. **Un exemple.** Montrer que S_8 est un carré parfait, c'est-à-dire le carré d'un entier.

L'objectif de la suite de l'exercice est de prouver qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que S_n soit un carré parfait.

4. Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$S_n = m^2 \iff (2n+1)^2 - 8m^2 = 1$$

Dans toute la suite de l'exercice on définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_1 = 1, b_2 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n \end{cases}$$

5. (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin qu'elle calcule et renvoie a_n pour tout entier naturel n non nul.

```
def suite_a(............)
    a =.................
    a_next =..........
    for ...................  :
        a_temp = ................
        a = ...................
        a_next = ..................
    return ..................
```

   (b) Ecrire une fonction Python qui renvoie b_n pour tout entier naturel n non nul.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \mathbb{N}^*$.
7. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
   On admet que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est également une suite strictement croissante dont tous les termes sont entiers.
8. (a) Que peut-on conjecturer quant à la parité de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$? Démontrer votre conjecture.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n$ est de la parité de n.
9. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = b_n + a_n\sqrt{2}$.
   (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire que l'on donnera.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (1+\sqrt{2})^n$.
10. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad v_n = b_n - a_n\sqrt{2}$.
    En vous inspirant de la démarche de la question 8, donner l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
11. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n^2 - 2a_n^2 = (-1)^n$.
12. (a) En déduire qu'il existe une infinité de couples (a,b) d'entiers naturels tels que $b^2 - 2a^2 = 1$.
    (b) Montrer plus précisément qu'il existe une infinité de couples (a,b) d'entiers naturels tels que a est pair, b est impair et $b^2 - 2a^2 = 1$.
13. Conclure en utilisant la question 4 qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que S_n soit un carré parfait.
14. **Applications :**
    (a) Donner un exemple d'un entier S_n qui soit strictement supérieur à 100 et un carré parfait.
    (b) Écrire un script Python permettant d'afficher les 10 premières valeurs de S_n telles que S_n soit un carré parfait déterminées à l'aide de la méthode détaillée dans l'exercice.

Problème 2

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Vérifier que $P^{-1}AP = D$.
2. (a) Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (c) Calculer D^n pour tout entier naturel n.

(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contiguës A, B et C. A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B. On suppose que les déplacements qui suivent se font selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C, alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n+1$;
- si à un instant n donné la mouche est dans la pièce B, alors elle y reste à l'instant $n+1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$, sinon elle va de façon équiprobable dans la pièce A ou dans la pièce C.

Pour tout entier naturel n, on définit l'événement A_n : « la mouche est dans la pièce A à l'instant n ». On définit de même les événements B_n et C_n. Enfin, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces événements.

3. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n, \qquad b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n.$$

4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$.

5. (a) Justifier que $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n = A^n U_0$.

(c) Déduire de la question 2.(d) que pour tout entier naturel n on a :

$$b_n = \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de a_n et c_n en fonction de n.

Problème 3

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]0;1[\cup]1;+\infty[$ par $\quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$,
ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.
2. Pour $x \in \mathcal{D}$, calculer $f'(x)$ puis justifier que $f'(x)$ est du même signe que $\ln(x) - 1$.
3. (a) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}$ en le complétant par les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

   (b) Montrer que f réalise une bijection de $[\mathrm{e};+\infty[$ sur $[\mathrm{e};+\infty[$.
4. (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x, pour $x \in \mathcal{D}$.

   (b) Donner le signe de $f(x) - x$ lorsque $x \in \mathcal{D}$.
5. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \mathrm{e}$.

   (b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$.
6. (a) Montrer que $\quad \forall x \in [\mathrm{e};+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{2}{\ln(x)}\right)^2$.

   (b) En déduire que $\quad \forall x \in [\mathrm{e};+\infty[, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

7. On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \mathrm{e}|$.
   (a) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}$.
   (b) Retrouver ainsi la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème 4

Soit (x_n) une suite réelle convergeant vers un réel ℓ. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

1. **Étude du cas où la suite (x_n) est croissante**
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \leqslant x_n$.
   (b) Montrer que la suite (y_n) est croissante.
   (c) En déduire que la suite (y_n) converge.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad y_{2n} \geqslant \frac{x_n + y_n}{2}$.
   (e) En déduire que la suite (y_n) converge vers ℓ.

On admet pour la suite que le résultat précédent reste vrai sans l'hypothèse de croissance de la suite (x_n).

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in [0,1[\text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1[$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) converge.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   (d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - u_n$ et $w_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$.
      i. Justifier que la suite (w_n) est bien définie.
      ii. Compléter les fonctions Python suivantes afin qu'elles renvoient u_n puis w_n pour $n \in \mathbb{N}$ dans le cas où $u_0 = \frac{1}{2}$.

```
def suite_u(.........):
    u=..........
    for ............
        ..............
    return ..........
def suite_w(...........):
    return ................
```

      iii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_n = \frac{1}{1 + u_n}$.
      iv. En déduire que la suite (w_n) converge et calculer sa limite.
      v. En déduire, si elle existe, la limite de la suite (nv_n).
      Indication : On pourra introduire la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k$ et utiliser le résultat démontré à la question 1.