Devoir Surveillé n° 3

Durée : 4h

Les documents et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. **Encadrez ou soulignez vos résultats.** En cas de non-respect de cette consigne, des points pourront être retirés.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet de quatre pages est composé de deux exercices et d'un problème en trois parties. Bon courage !

Exercice 1

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire :

La fonction d est définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $\quad d(x)=\exp\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1. Calculer la fonction dérivée d'. En déduire les variations de d.
2. Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x>-1$: $\quad 0<d(x)<e$
4. (a) En Python, quelle bibliothèque doit-on importer pour définir la fonction exponentielle ? Quelle instruction écrivez-vous pour importer cette bibliothèque ?
   (b) Ecrire une fonction Python pour définir la fonction d.
   (c) Quelle bibliothèque doit-on importer pour tracer des courbes ? Quelle instruction écrivez-vous pour importer cette bibliothèque ?
   (d) Ecrire un programme permettant de tracer la courbe de la fonction d sur $[0,10]$.

Partie B : Etude de la fonction f

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+1-\exp\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f.

1. (a) Pour $x\in]-1\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   Vérifier que : $\quad f''(x)=\dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\cdot\exp\left(\frac{x}{x+1}\right)$
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-1} f'(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f'.
2. (a) Démontrer que l'équation $f'(x)=0$ admet sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.
   Dans la suite du problème, on notera α la solution non-nulle.
   (b) Préciser l'intervalle auquel appartient α.
3. (a) Etudier les variations de f.
   (b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 2

Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, notés A, B, C et D, d'un carré selon le protocole suivant :

- À l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet A.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 0$), la puce se trouve sur le sommet A, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet C avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$), la puce se trouve sur le sommet B, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet C avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$), la puce se trouve sur le sommet C, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet D avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$), la puce se trouve sur le sommet D, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur le sommet D avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- A_n l'évènement : "la puce se trouve sur le sommet A à l'instant n" ;
- B_n l'évènement : "la puce se trouve sur le sommet B à l'instant n" ;
- C_n l'évènement : "la puce se trouve sur le sommet C à l'instant n" ;
- D_n l'évènement : "la puce se trouve sur le sommet D à l'instant n".

1. (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :
$$P(A_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n)\,.$$
   (b) Exprimer de même, pour tout entier $n \geqslant 2$, $P(B_{n+1})$, $P(C_{n+1})$, $P(D_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$ et $P(D_n)$.
   (c) Vérifier que les relations précédentes sont encore valables pour $n = 1$ et $n = 0$.
   (d) Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = 1\,.$$

2. On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n la matrice définie par : $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$. De plus, on pose :
$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$
   En utilisant les relations trouvées précédemment, établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation :
$$U_{n+1} = AU_n + B\,.$$

3. (a) Déterminer une matrice L à trois lignes et une colonne vérifiant :
$$L = AL + B\,.$$
   (b) Établir pour tout entier naturel n, la relation suivante :
$$U_n = A^n(U_0 - L) + L\,.$$

4. On pose $C = 6A$. Soit R, D et Q les matrices d'ordre 3 définies par :
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer RQ. En déduire que R est inversible et donner R^{-1}, où R^{-1} désigne la matrice inverse de la matrice R.
   (b) Calculer $CR - RD$.
   (c) En déduire pour tout entier naturel n, la relation suivante :
$$A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}\,.$$

5. On admet que la limite de la matrice U_n lorsque n tend vers $+\infty$, est une matrice U dont les coefficients sont obtenus en prenant la limite des coefficients de U_n lorsque n tend vers $+\infty$. Déterminer U et préciser $\lim_{n\to+\infty} P(D_n)$.

Problème 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\quad u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$

Dans tout cet exercice il n'est pas nécessaire d'utiliser les résultats vus en cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Partie I : Quelques résultats généraux

1. Montrer par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. Montrer par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$.
3. Montrer par récurrence simple que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{2k-1} = u_{2n} - 1$.
4. Montrer par récurrence simple que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$.
5. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{u_p}{2^{p+1}}$.

   En remarquant que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = u_{p+2} - u_{p+1}$, montrer sans récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{s_n}{2} = 2s_{n+2} - s_{n+1} - 1.$$

Partie II : Lien avec les matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

6. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $AX_n = X_{n+1}$.
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
8. On note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   (a) Vérifier que φ est racine de l'équation $x^2 = x + 1$.
   (b) Exprimer $\dfrac{1}{\varphi}$ en fonction de φ et vérifier que $-\dfrac{1}{\varphi}$ est aussi racine de l'équation $x^2 = x + 1$.
   On notera dorénavant $\bar{\varphi} = -\dfrac{1}{\varphi}$.
9. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \bar{\varphi} \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \bar{\varphi} \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (d) En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de φ et $\bar{\varphi}$.
10. En déduire la formule dite « formule de Binet » : $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \bar{\varphi}^{n+1}\right)$

Tourner la page

Partie III : Z-décomposition

Dans cette partie on considère toujours la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en début d'exercice.

On s'intéresse au théorème suivant (que l'on admet).

Théorème : Pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique entier k et un unique k-uplet d'entiers $(c_1,\ldots,c_k)$, vérifiant :

$$c_1 \geqslant 1 \quad \textit{et pour tout} \quad i \in [\![1,k-1]\!], \quad c_i+1<c_{i+1}, \quad \textit{tels que} \quad n=\sum_{i=1}^{k} u_{c_i}.$$

Cette décomposition s'appelle la Z-décomposition du nombre n.

Par exemple, $n=4$ se décompose en : $4=1+3=u_1+u_3$. Donc $k=2$ et $(c_1,c_2)=(1,3)$.

Par ailleurs, $n=17$ se décompose en : $17=1+3+13=u_1+u_3+u_6$. Donc $k=3$ et $(c_1,c_2,c_3)=(1,3,6)$

11. Calculer les premiers termes de la suite jusqu'à u_{10}.
    On vérifiera en particulier que $u_{10}=89$.
12. (a) En remarquant que $6=1+2+3=u_1+u_2+u_3$ et que $6=1+5=u_1+u_4$, donner la Z-décomposition de 6 et justifier votre choix.
    (b) Donner la Z-décomposition du nombre 5.
    (c) Donner la Z-décomposition du nombre 35 .
    (d) Donner la Z-décomposition du nombre 130.
13. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
    (a) Justifier l'existence d'un entier naturel J non nul tel que : $\forall i\geqslant J, u_i\geqslant n+1$.
    Notons $A_n=\{i\in\mathbb{N}^*, u_i\leqslant n\}$.
    (b) Montrer que $1\in A_n$ et que A_n contient au plus $J-1$ éléments.
    Soit alors $j=\max(A_n)$, c'est-à-dire que j est le plus grand entier appartenant à A_n.
    (c) Montrer que $j\geqslant 1$ et que $u_j\leqslant n<u_{j+1}$.
    (d) Démontrer que $n-u_j<u_{j-1}$.
14. **Python** Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

```
def fibonacci(n):
    if ............... :
        return ............
    elif ............. :
        return ..........
    else :
        u= ..........
        v= ...........
        for k in range (2,n+1) :
            ..........
            ...........
            ............
        return ...............
```