Corrigé du DS n° 2

Exercice 1

1. On remarque que $P(1) = 0$ ainsi le polynôme $x-1$ divise P et il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(x) = (x-1)Q$. On peut déterminer Q en effectuant la division euclidienne de P par $x-1$. On obtient alors :

$$Q(x) = 3x^2 + 16x + 5.$$

Il reste à factoriser Q. Son discriminant vaut $196 = (14)^2$. Le polynôme Q possède donc 2 racines :

$$x_1 = \frac{-16-14}{6} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-16+14}{6} = -\frac{1}{3}$$

On a donc :

$$Q(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x+5).$$

En conclusion,

$$P(x) = 3(x-1)(x+5)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

2. On remarque que l'inéquation (I) peut s'écrire (car $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$).

$$(I) \iff \frac{\mathrm{e}^{3x} + 13\mathrm{e}^{2x} - 11\mathrm{e}^x - 5}{\mathrm{e}^x} > 0.$$

Posons $X = \mathrm{e}^x$, on a alors :

$$(I) \iff \frac{P(X)}{X} > 0 \iff P(X) > 0.$$

On est donc amené à résoudre :

$$3(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 5)\left(\mathrm{e}^x + \frac{1}{3}\right) > 0$$

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x + 5 > 0$ et $\mathrm{e}^x + \frac{1}{3} > 0$ ainsi le signe de ce produit dépend du signe de $\mathrm{e}^x - 1$. Or on a :

$$\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff x > \ln(1) = 0.$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{S} =]0, +\infty[}$.

Exercice 2 *Etude de fonctions*

1. La fonction φ est de la forme $\frac{N}{D}$ avec $N = \ln(A)$ et $D = \ln(B)$. Il faut donc $A > 0$ et $B > 0$ et que $D \neq 0$. Il faut donc :

$$1 + x > 0, \qquad 1 - x > 0, \qquad 1 - x \neq 1.$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_\varphi =]-1; 0[\cup]0; 1[}$.

2. (a) En suivant un raisonnement du même type que précédemment, on obtient $\boxed{\mathcal{D}_h =]-1; 1[}$.
   (b) Calculons la dérivée de φ, on a pour $x \in \mathcal{D}_\varphi$:

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}\ln(1-x) - \ln(1+x)\frac{-1}{1-x}}{(\ln(1-x))^2} = \frac{(1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)}{(1-x)(1+x)(\ln(1-x))^2}$$

Ainsi, $\boxed{\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)(\ln(1-x))^2}}$.

(c) Calculons la dérivée de h, pour $x \in \mathcal{D}_h$, on a :

$$h'(x) = -1 \times \ln(1-x) + (1-x) \times \frac{-1}{1-x} + 1 \times \ln(1+x) + (1+x) \times \frac{1}{1+x} = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

(d) Cette inéquation est bien définie sur $]-1;1[$. On a pour $x \in]-1;1[$,

$$\ln(1-x) < \ln(1+x) \iff 1-x < 1+x \iff 0 < 2x \iff 0 < x.$$

Ainsi $\boxed{\mathscr{S} =]0;1[}$.

(e) De la question précédente, on en déduit que $h'(x) > 0$ pour $x \in]0;1[$ et $h'(x) < 0$ pour $x \in]-1;0[$.

(f) On est maintenant en mesure de dresser le tableau de variations de f.

x	-1		0		1
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
h	‖	↘	0	↗	‖

(g) D'après le tableau de variations de h et comme $h(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \in]-1;1[$, $\boxed{h(x) \geqslant 0}$.

(h) Rappelons que pour $x \in \mathcal{D}_\varphi$, $\varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{(1-x^2)(\ln(1-x))^2}$. Or pour $x \in]-1;1[, 1-x^2 > 0$ et $(\ln(1-x))^2 > 0$. De plus, nous venons de montrer que pour $x \in]-1;1[$, $h'(x) \geqslant 0$. On en conclut que pour $x \in]-1;1[$, $\varphi'(x) \geqslant 0$.

x	-1		0		1
$\varphi'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	‖
φ	‖	↗	‖	↗	‖

3. Pour $x \in \mathcal{D}_\varphi$, on a :

$$\varphi(x) = -2 \iff \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} = -2 \iff \ln(1+x) = -2\ln(1-x) \iff \ln(1+x) = \ln\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) \iff 1+x = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ainsi pour $x \in \mathcal{D}_\varphi$,

$$\varphi(x) = -2 \iff (1+x)(1-x)^2 = 1 \iff x(x^2-x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^2 - x - 1 = 0$$

Or $0 \notin \mathcal{D}_\varphi$. De plus,

$$x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Or $\sqrt{5} > 1$ donc $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathcal{D}_\varphi$. On vérifie bien que $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \in \mathcal{D}_\varphi$. On peut donc conclure que $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}}$.

4. (a) On a la fonction suivante :

```python
def phi(x):
    y=np.log(1+x)/np.log(1-x)
    return y
```

(b) On a les instructions suivantes :

```python
import matplotlib.pyplot as plt
x1=np.arange(-1,1,0.1)
plt.plot(x1,phi(x1))
```

Exercice 3

1. (a) On effectue une récurrence double. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien défini et strictement positif.»

Initialisation Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = \mathrm{e}$, les propriétés $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité Soit un entier n. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, u_n et u_{n+1} sont bien définis et strictement positifs. Donc $\sqrt{u_n u_{n+1}}$ est bien défini et strictement positif i.e. u_{n+2} est bien défini et strictement positif.
La propriété $\mathcal{P}(n+2)$ est donc vraie.

Conclusion D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\ln(u_{n+2}) = \ln\left(\sqrt{u_n u_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\ln(u_n) + \frac{1}{2}\ln(u_{n+1}).$$

Ainsi, la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 0}$ est $\boxed{\text{récurrente linéaire d'ordre 2}}$.

(c) La suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 0}$ est récurrente linéaire d'ordre 2, son équation caractéristique est $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$.
Les deux solutions de l'équation sont 1 et $-\frac{1}{2}$. Ainsi il existe λ et μ deux réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_n) = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme $\ln(u_0) = 0$ et $\ln(u_1) = 1$, on en déduit (en résolvant un système linéaire) que

$$\lambda = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{2}{3}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

On en conclut alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \exp\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}$.

(d) On peut compléter le script comme suit :

```python
def calcul_suite1(n):
    v=1
    u=np.exp(1)
    for k in range(n-1):
        w=v
        v=u
        u=np.sqrt(u*w)
    return(u)
```

2. (a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} - u_{n+2} = u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) + 6(u_{n+1} - u_n).$$

La suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$ est $\boxed{\text{récurrente linéaire d'ordre 2}}$.

(b) La suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente linéaire d'ordre 2, son équation caractéristique est : $x^2 - x - 6 = 0$.
Les deux solutions de cette équations sont 3 et -2. Ainsi il existe λ et μ deux réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \lambda \cdot 3^n + \mu \cdot (-2)^n.$$

Comme $u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 1$, on en déduit (en résolvant un système linéaire) que

$$\lambda = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{2}{5}.$$

Ainsi on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 \cdot 3^n}{5} + \frac{2 \cdot (-2)^n}{5} = \frac{3^{n+1}}{5} - \frac{(-2)^{n+1}}{5}.$$

(c) L'astuce consiste à vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + u_0.$$

Ainsi on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3^{k+1}}{5} - \frac{(-2)^{k+1}}{5} \right) + 1 &= \frac{3}{5} \sum_{k=0}^{n-1} 3^k + \frac{2}{5} \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^k + 1 \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{3^n - 1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1 - (-2)^n}{3} + 1 \\ &= \frac{3^{n+1}}{10} + \frac{(-2)^{n+1}}{15} + \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Problème 1

Partie I

1. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

Et donc, pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0_3 \times N^{k-2} = 0_3$.

2. (a) On a :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = I_3$$

$$QP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I_3$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} Q\Delta P &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

(c) On a $Q\Delta P = D$. En multipliant à gauche par P, on obtient $PQ\Delta P = PD$. Or, $PQ = I_3$ donc on a $I_3\Delta P = PD$ soit $\Delta P = PD$. On multiplie maintenant à droite par Q, cela donne $\Delta PQ = PDQ$. Or, $PQ = I_3$ donc $\Delta I_3 = PDQ$ donc $\Delta = PDQ$.

(d) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $\Delta^n = PD^nQ$ »

Initialisation $(n = 0)$:

$\Delta^0 = I_3$ et $PD^0Q = PI_3Q = PQ = I_3$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1} &= \Delta^n \times \Delta \\ &= PD^nQ \times PDQ \\ &= PD^nI_3DQ \\ &= PD^{n+1}Q \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\Delta^n = PD^nQ$$

(e) Puisque D est diagonale, on a $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or, d'après la question précédente, $\Delta^n = PD^nQ$. Donc,

$$\begin{aligned}
\Delta^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. (a) On a :

$$\Delta N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on a bien $\Delta N = N\Delta$.

(b) On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $A^n = \Delta^n + nN\Delta^{n-1}$ ».

Initialisation (n=1) On a $A^1 = A$ et $\Delta^1 + 1N\Delta^{1-1} = \Delta + N = A$ car $\Delta^0 = I_3$ par convention. Ainsi

$$A^1 = \Delta^1 + 1N\Delta^{1-1}$$

et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n \times A \\
&= (\Delta^n + nN\Delta^{n-1} \times A \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= (\Delta^n + nN\Delta^{n-1} \times (\Delta + N) \\
&= \Delta^{n+1} + \Delta^n N + nN\Delta^n + nN\Delta^{n-1}N \\
&= \Delta^{n+1} + N\Delta^n + nN\Delta^n + nN^2\Delta^{n-1} \quad \text{car } \Delta N = N\Delta \\
&= \Delta^{n+1} + N\Delta^n + nN\Delta^n \quad \text{car } N^2 = 0_3 \\
&= \Delta^{n+1} + (n+1)N\Delta^n.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \Delta^n + nN\Delta^{n-1}.$$

(c) On a donc :

$$\begin{aligned}
A^n &= \Delta^n + nN\Delta^{n-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n-1 & 2^{n-1}-1 & 0 \\ -2^n+2 & -2^{n-1}+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & -n \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Partie II

1. On a :

$$AU_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + y_n - z_n \\ -2x_n + 2z_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

2. Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $U_n = A^n U_0$ »

Initialisation $(n=0)$:
$A^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
On sait que $U_{n+1} = AU_n$ d'après la question précédente, et que $U_n = A^n U_0$ par hypothèse de récurrence. Dès lors,

$$U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$U_n = A^n U_0$$

3. On a donc :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = U_n &= A^n U_0 \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & -n \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 + 2^n - 1 - n \\ -2^{n+1} + 2 + -2^n + 2 + 2n \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 2^n - 2 - n \\ -2^{n+1} - 2^n + 4 + 2n \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n(2+1) - 2 - n \\ -2^n(2+1) + 4 + 2n \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 - n \\ -3 \times 2^n + 4 + 2n \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Partie III

1. (a) Pour tout n, on a $z_{n+1} = z_n$ donc (z_n) est constante. Ainsi, pour tout n, $z_n = z_0 = 1$.

(b) On a donc $x_{n+1} = 3x_n + y_n - 1$ et $y_{n+1} = -2x_n + 2$.

2. (a) Calculons $r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1}$:

$$r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = 3x_n + y_n - 1 - 2x_n + 2 = x_n + y_n + 1 = r_n + 1$$

Ainsi, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 1.

(b) Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n + y_n = r_n = r_0 + n = x_0 + y_0 + n = 2 + n$$

3. (a) On a :

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 2x_{n+1} + y_{n+1} \\ &= 2(3x_n + y_n - 1) - 2x_n + 2 \\ &= 4x_n + 2y_n \\ &= 2(2x_n + y_n) \\ &= 2s_n \end{aligned}$$

Donc, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.

(b) Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2x_n + y_n = s_n = s_0 \times 2^n = (2x_0 + y_0) \times 2^n = 3 \times 2^n$$

4. On remarque que :

$$s_n - r_n = 2x_n + y_n - x_n - y_n = x_n$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = s_n - r_n = 3 \times 2^n - 2 - n$$

De même, on remarque que :

$$2r_n - s_n = 2(x_n + y_n) - 2x_n - y_n = 2x_n + 2y_n - 2x_n - y_n = y_n$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$y_n = 2r_n - s_n = 2(2 + n) - 3 \times 2^n = -3 \times 2^n + 4 + 2n$$

On retrouve donc bien les résultats de la **partie II**.

Problème 2

Partie I

1. D'après le cours, il y a deux cas.

Premier cas $x = 1$ et dans ce cas,

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

Deuxième cas $x \neq 1$ et dans ce cas,

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = x\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}.$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. La fonction f_n est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. En dérivant l'expression obtenue à la question précédente, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$f_n'(x) = \frac{(1-(n+1)x^n)(1-x) + \left(x - x^{n+1}\right)}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

On a donc d'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\boxed{f_n'(x) = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}}$.

D'autre part, pour $k \in [\![1, n]\!]$ fixé, on sait que la dérivée de $x \mapsto x^k$ est $x \mapsto kx^{k-1}$. On a alors par somme, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\boxed{f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}}$.

(b) Les deux formules trouvées à la question précédente doivent être égales. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}}.$$

3. On pose $x = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1-(n+1)\frac{1}{2^n} + n\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^2}} = 4\left(1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}\right).$$

Or, $\dfrac{n+2}{2^{n+1}} > 0$. On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} \leqslant 4.$$

De plus, $\dfrac{n+2}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi par opérations, $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4}$.

Partie II

1. Soit $a > 0$, la fonction $x \mapsto a+x$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et $a+x \geqslant 0 \iff x \geqslant -a$. Ainsi par composition, f est définie sur $\boxed{\mathcal{D}_f = [-a, +\infty[}$.
2. Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On a alors $x \geqslant -a$ donc $x + a \geqslant 0$. Ainsi, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, il vient $\sqrt{a+x} = f(x) \geqslant \sqrt{0} = 0 \geqslant -a$ puisque $a > 0$. Donc $f(x) \in \mathcal{D}_f$. En conclusion, $\boxed{\mathcal{D}_f \text{ est stable par } f.}$
3. (a) L'équation est à résoudre sur $[-a, +\infty[$. Pour qu'il y ait des solutions, il faut aussi que $x \geqslant 0$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme $\sqrt{a+x}$ et x sont positifs, on a :

$$\sqrt{a+x} = x \iff a + x = x^2 \iff x^2 - x - a = 0.$$

Le déterminant du trinôme à étudier est $\Delta = 1 + 4a > 0$. Ainsi, ce trinôme a deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$. Cependant, comme $a > 0$, on a $1 + 4a > 1$ et donc par stricte croissance de la fonction racine carrée, $x_2 < 0$. Ainsi,

$$\sqrt{a+x} = x \iff x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

L'équation admet une unique solution qui est $\boxed{x = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}$.

(b) Un point fixe de f est un réel $x \in \mathcal{D}_f$ vérifiant $f(x) = x$. D'après la question précédente, f admet un unique point fixe sur $\mathcal{D}_f$ qui est $\boxed{p = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}$.

4. Soit $x \in [0, p]$. On a alors $0 \leqslant x \leqslant p$ donc $0 < a \leqslant x + a \leqslant p + a$ et donc par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \sqrt{a} \leqslant f(x) \leqslant f(p) = p$ car p est le point fixe de f. Ainsi, $f(x) \in [0, p]$. En conclusion, $\boxed{[0, p] \text{ est stable par } f}$.
5. Soit $x \geqslant p$. On a alors, par les mêmes arguments qu'à la question précédente, $x + a \geqslant p + a$ donc $f(x) \geqslant f(p) = p$ donc $f(x) \in [p, +\infty[$. En conclusion, $\boxed{[p, +\infty[\text{ est stable par } f}$.
6. (a) L'inéquation est à résoudre sur $[-a, +\infty[$. Pour qu'il y ait des solution, il faut aussi que $x \geqslant 0$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et car $\sqrt{a+x}$ et x sont positifs, on a :

$$\sqrt{a+x} \leqslant x \iff a + x \leqslant x^2 \iff x^2 - x - a \geqslant 0.$$

Or, d'après le cours sur les trinômes, $x^2 - x - a$ est positifs à l'extérieur de ses racines. D'après les calculs de la question 3.(a), l'inéquation a pour solutions $\boxed{[p, +\infty[}$.

(b) On a $g(x) \leqslant 0 \iff \sqrt{a+x} - x \leqslant 0$.
D'après la question précédente, la fonction g est $\boxed{\text{négative sur } [p, +\infty[\text{ et positive sur } [0, p]}$.

7. Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \in \mathcal{D}_f$ ».

Initialisation $(n=0)$ u_0 existe et est un élément de $\mathcal{D}_f$ d'après l'énoncé.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors $u_n \in \mathcal{D}_f$. Or, la fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f$ d'après la question 1 et $\mathcal{D}_f$ est stable par f d'après la question 2. Ainsi, $u_{n+1} = f(u_n)$ existe et est un élément de $\mathcal{D}_f$.

Conclusion D'après le principe de récurrence, nous avons démontré que la suite est bien définie.

8. (a) Supposons que $u_0 \geqslant p$. Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant p$ ».

Initialisation $(n=0)$ Pour $n=0$, on a $u_0 \geqslant p$ par hypothèse donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.
On a alors $u_n \in [p, +\infty[$. Donc, d'après la question 5., $u_{n+1} = f(u_n) \in [p, +\infty[$ donc $u_{n+1} \geqslant p$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion D'après le principe de récurrence, on a démontré que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant p$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n).$$

Or, d'après la question précédente, $u_n \geqslant p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et d'après la question 6.(b), g est négative sur $[p, +\infty[$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{décroissante}}$.

(c) Nous avons démontré en question 8.(b). que la suite est décroissante, et en question 8.(a) qu'elle est minorée par p. Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geqslant p$. Par ailleurs, f étant continue sur son ensemble de définition, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Par unicité de la limite, on déduit que $f(\ell) = \ell$ et que donc ℓ est un point fixe de f.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{convergente et d'après la question 3.(b), sa limite est } p}$.

9. On adopte le même raisonnement que dans la question 8. On montre d'abord par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,p]$ en utilisant la question 5., puis on montre que la suite est croissante en utilisant la question 6.(b), enfin on montre que la suite est convergente d'après le théorème de convergence monotone car elle est croissante et majorée par p. Par le même raisonnement sur la limite ℓ, on l'identifie la limite grâce à la question 3.(b).
Ainsi, lorsque $u_0 \in [0,p]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge également vers } p}$.

10. En appliquant les résultats précédents avec $a = 1 > 0$ et $u_n = x_n$ avec $u_0 = x_0 = 1$, on montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $p = \dfrac{1+\sqrt{1+4\times 1}}{2}$.
Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers } p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Partie III

1. En utilisant les définitions, on a :

$$a_1 = \prod_{k=2}^{2} k^{2^{1+2-k}} = 2^{2^{3-2}} = 2^2 = 4,$$

$$a_2 = \prod_{k=2}^{3} k^{2^{2+2-k}} = 2^{2^2} \times 3^{2^1} = 2^4 \times 3^2 = 144$$

$$u_0 = \sqrt{a_0} = 1$$

$$u_1 = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1}} = \sqrt{1+\sqrt{4}} = \sqrt{3},$$

$$u_2 = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2}}} = \sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{144}}} = \sqrt{1+\sqrt{4+12}} = \sqrt{1+\sqrt{16}} = \sqrt{5}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0$ comme produit de nombres strictement positifs. On peut donc appliquer la fonction $\ln$, et grâce à ses propriétés, il vient :

$$\frac{\ln(a_n)}{2^n} = \frac{\sum\limits_{k=2}^{n+1} \ln\left(k^{2^{n+2-k}}\right)}{2^n} = \frac{\sum\limits_{k=2}^{n+1} 2^{n+2-k}\ln(k)}{2^n} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\ln(k)}{2^{k-2}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{2^{k-2}}$$

car $\ln(1) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\dfrac{\ln(a_n)}{2^n} = \sum\limits_{k=2}^{n+1} \dfrac{\ln(k)}{2^{k-2}}}$.

3. Posons $f : x \mapsto \ln(x) - x$. f est définie et dérivable sur $[1, +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables sur cet intervalle et pour pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0.$$

Ainsi, f est décroissante sur $[1, +\infty[$ et comme $f(1) = -1 < 0$, f est négative sur $[1, +\infty[$.
Ainsi, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\boxed{\ln(x) \leqslant x}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, d'après la question précédente, on a :

$$\frac{\ln(k)}{2^{k-2}} \leqslant \frac{k}{2^{k-2}}.$$

Ainsi, en sommant terme à terme et grâce à la question 2., on obtient :

$$\frac{\ln(a_n)}{2^n} \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^{k-2}} = 2\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^{k-1}}.$$

D'après la question 3. de la partie I, on a donc : $\boxed{\frac{\ln(a_n)}{2^n} \leqslant 2 \times 4 = 8}$.

5. D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\ln(a_n)}{2^n} \leqslant 8$ donc $\ln\left(a_n^{\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant 8$ et donc $a_n^{\frac{1}{2^n}} \leqslant e^8$ par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.
La suite $\left(a_n^{\frac{1}{2^n}}\right)_n$ est bornée et donc d'après l'énoncé, la suite $\boxed{(u_n)_n \text{ converge}}$.

Partie IV

1. On peut, par exemple, écrire :

```python
def calcul_a(n):
    a=1
    for k in range(2,n+2):
        a=a*k**(2**(n+2-k))
    return a
```

2. (a) On peut écrire que :

```python
n=101
u=n
for i in range(n-1,0,-1)
    u=i*np.sqrt(1+u)
print(u)
```

(b) Il suffit de lancer le programme précédent avec une très grande valeur de n.