Corrigé du Devoir Surveillé n° 2

Exercice 1 *Factorisation de polynômes*

1. $P(-1) = 0$ donc -1 est racine évidente du polynôme P. Ainsi il existe $Q \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$. Déterminons le polynôme Q en effectuant la division euclidienne de P par $x + 1$. On obtient $Q(x) = 6x^3 + x^2 - 4x + 1$.
On remarque que $Q(-1) = 0$ donc -1 est racine du polynôme Q. Ainsi il existe $R \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $Q(x) = (x + 1)R(x)$. Déterminons le polynôme R en effectuant la division euclidienne de Q par $x + 1$. On obtient $R(x) = 6x^2 - 5x + 1$.
Factorisons alors le polynôme R. Pour cela déterminons ses racines. On a $\Delta = 1$ et $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$. On en déduit alors la factorisation de R.
$$R(x) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$
On en déduit alors la factorisation du polynôme P :
$$P(x) = 6(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$
Remarque : Après avoir montré que -1 était racine de P, on aurait pu calculer son ordre de multiplicité. On aurait trouvé qu'il était de 2 ainsi il existe $T \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que :
$$P(x) = (x+1)^2 T(x).$$
Pour déterminer T, on pouvait poser $T(x) = ax^2 + bx + c$, développer et ordonner $(x + 1)^2 T(x)$ puis identifier avec les coefficients de $P(x)$.
2. Posons $X = \mathrm{e}^x$, l'inéquation devient alors :
$$6X^3 + 7X^2 - 3X - 3 + \frac{1}{X} \leqslant 0 \iff \frac{6X^4 + 7X^3 - 3X^2 - 3X + 1}{X} \leqslant 0 \iff \frac{P(X)}{X} \leqslant 0.$$
L'inéquation se réécrit donc :
$$\frac{6(\mathrm{e}^x+1)^2\left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{3}\right)}{\mathrm{e}^x} \leqslant 0$$
Dressons alors le tableau de signe de cette fraction

x	$-\infty$		$-\ln(3)$		$-\ln(2)$		$+\infty$
Signe de $(\mathrm{e}^x + 1)^2$		+		+		+	
Signe de $\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	+	
Signe de $\mathrm{e}^x - \frac{1}{3}$		$-$	0	+		+	
Signe de e^x		+		+		+	
Signe de $\dfrac{6(\mathrm{e}^x+1)^2\left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{3}\right)}{\mathrm{e}^x}$		+	0	$-$	0	+	

Ainsi $\boxed{\mathscr{S} = [-\ln(3); -\ln(2)].}$

Exercice 2

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, elle est strictement décroissante sur $[1,3]$. On a $f(1) = 3$ et $f(3) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. On a alors le tableau de variations suivant :

x	1		3
Signe de $f'(x)$		$-$	
Variations de f	3	$\searrow$	$\frac{5}{3}$

2. On remarque que $\frac{5}{3} \geqslant 1$ donc $\left[\frac{5}{3}, 3\right] \subset [1,3]$. Or d'après la question précédente, on a : $f([1,3]) = \left[\frac{5}{3}, 3\right]$ donc $\boxed{f([1,3]) \subset [1,3]}$.

3. Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien défini et $u_n \in [1,3]$ »

   Initialisation Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ d'après l'énoncé donc u_0 existe et $u_0 \in [1,3]$.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors, $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. On sait donc que u_n existe et que $u_n \in [1,3]$. Comme f est définie sur $]0, +\infty[$ et $[1,3] \subset]0, +\infty[$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie. Par ailleurs, comme, d'après la question précédente, $f([1,3]) \subset [1,3]$ et que d'après l'hypothèse de récurrence $u_n \in [1,3]$, on a bien $u_{n+1} = f(u_n) \in [1,3]$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion D'après le principe de récurrence, on a démontré que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f \circ f(v_n) = g(v_n)$$
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} = g(v_n)}$.

   (b) On a $v_0 = u_0 = 1$ et $v_1 = u_2 = f(f(u_1)) = f(f(1)) = f(3) = \frac{5}{3}$. On a donc $\boxed{v_0 = 1 \leqslant \frac{5}{3} = v_1}$.

   (c) Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $v_n \leqslant v_{n+1}$ ».

   Initialisation Pour $n = 0$, on a bien $v_0 \leqslant v_1$ d'après la question précédente. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $v_n \leqslant v_{n+1}$. Appliquons alors deux fois la fonction f qui est décroissante d'après la question 2 . Il vient alors $f(v_n) \geqslant f(v_{n+1})$ puis $f(f(v_n)) \leqslant f(f(v_{n+1}))$ c'est à dire, $g(v_n) \leqslant g(v_{n+1})$ ou, d'après la question 4.(a), $v_{n+1} \leqslant v_{n+2}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion D'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (v_n) est croissante.

5. (a) On suit le même raisonnement qu'à la question 5.(a). Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = f \circ f(w_n) = g(w_n)$$
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{w_{n+1} = g(w_n)}$.

   (b) On suit le raisonnement des questions 5.(b) et 5.(c).
   D'abord $w_0 = u_1 = f(1) = 3$ et $w_1 = u_3 = f(u_2) = \frac{11}{5}$. Ainsi, $\boxed{w_0 \geqslant w_1}$. Puis, on démontre par récurrence, comme à la question 5.(c) que (w_n) est décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $w_{n+1} \leqslant w_n$ ».

   Initialisation Pour $n = 0$, on a bien $w_1 \leqslant w_0$ d'après ce qui précède. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $w_{n+1} \leqslant w_n$. Appliquons alors deux fois la fonction f qui est décroissante d'après la question 2 . Il vient alors $f(w_{n+1}) \geqslant f(w_n)$ puis $f(f(w_{n+1})) \leqslant f(f(w_n))$ c'est à dire, $g(w_{n+1}) \leqslant g(w_n)$ ou, d'après la question 4.(a), $w_{n+2} \leqslant w_{n+1}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion D'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (w_n) est $\boxed{\text{décroissante}}$.

6. La suite (v_n) est croissante et d'après la question 4. elle est majorée par 3. Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{elle converge vers une limite } \ell}$. De même, la suite (w_n) est décroissante et d'après la question 3 . elle est minorée par 1 donc, d'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{elle converge vers un réel } \ell'}$.
7. Soit $x \in [1,3]$. Alors
$$g(x) = f(f(x)) = 1 + \frac{2}{f(x)} = 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = \frac{3x+2}{x+2}.$$
8. Cherchons alors les points fixes de g sur $[1,3]$. Soit $x \in [1,3]$.
$$g(x) = x \iff \frac{3x+2}{x+2} = x \iff 3x+2 = x(x+2) \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x+1)(x-2) = 0.$$
Ainsi g a un unique point fixe sur $[1,3]$ qui est $\boxed{x=2}$.
9. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. On sait que la suite $(v_n)_n$ converge vers une limite ℓ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$. De plus, la fonction g est continue sur $[1,3]$ (composée de fonctions continues sur cet intervalle) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(v_n) = g(\ell)$. Ainsi par unicité de la limite, on a $g(\ell) = \ell$. Or d'après la question précédente, g possède un unique point fixe sur $[1,3]$ qui vaut 2 donc $\ell = 2$. Ainsi la suite $\boxed{(v_n)_n \text{ converge vers } 2}$.

   On montre exactement de la même manière que la suite $\boxed{(w_n)_n \text{ converge vers } 2}$.
10. Nous avons démontré, dans les questions précédentes, que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Ainsi, d'après le théorème des deux suites extraites, (u_n) converge vers cette même limite. En conclusion, la suite $\boxed{(u_n)_n \text{ converge vers } 2}$.
11. **Python**

    On suppose qu'il est écrit en haut de notre script :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

   (a) A quoi sert la bibliothèque `numpy` ? A quoi sert la bibliothèque `matplotlib.pyplot` ?

   (b) Compléter la fonction ci-dessous permettant de définir la fonction f.

```
def f(x):
    y= 1+2/x
    return y
```

   (c) Compléter le programme ci-dessous permettant de tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[1,3]$.

```
x=np.arange(1,3,0.0001)
plt.plot(x,f(x))
```

   (d) Compléter la fonction ci-dessous qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.

```
def suiteexo2(n):
    u=1
    for k in range(n):
        u=1+2/u
    return u
```

   (e) Modifier la fonction précédente pour que prenant, un entier n en entrée, elle renvoie un vecteur contenant toutes les valeurs u_0, u_1, …, u_n.

```
def suiteexo2bis(n):
    u=np.zeros(n)
    u[0]=1
    for k in range(n-1):
        u[k+1]=f(u[k])
    return u
```

   (f) Que faut-il écrire pour tracer les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

```
plt.plot(suiteexo2bis(50),'+')
```

Problème 1 *Suite récurrente et matrice*

1. On a $X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons AX_n, on obtient :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

(b) Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $X_n = A^n X_0$ » .
Initialisation $(n = 0)$:

$$A^0 X_0 = IX_1 = X_0$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= A \times A^n X_0 \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$X_n = A^n X_0.$$

3. (a) On a $PQ = 4I_3$. On a alors $P \times \frac{1}{4}Q = I_3$. La matrice P est donc inversible d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$. Soit :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(b) On a $PT = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $AP = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Ainsi $PT = AP$. On en déduit que $A = PTP^{-1}$.
Montrons alors par récurrence sur n que $A^n = PT^nP^{-1}$. Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $PT^nP^{-1} = A^n$ » .
Initialisation $(n = 0)$:

$$A^0 = I \qquad \text{et} \qquad PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PT^nP^{-1} \times PTP^{-1} \quad \text{par hypothèse de récurrence et car } A = PTP^{-1} \\ &= PT^nITP^{-1} \\ &= PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$A^n = PT^nP^{-1}.$$

4. (a) Calculons des premières puissances de N, on a :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^2 = 0_3.$$

On en déduit que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0_3$. En effet, $N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0_3 \times N^{k-2} = 0_3$.

(b) On vérifie facilement que $DN = ND$. Montrons alors la relation demandée par récurrence sur n.
Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $T^n = D^n + nND^{n-1}$ ».

Initialisation $(n = 1)$
$T^1 = T$ et $D^1 + ND^{n-1} = D + N = T$. Ainsi $T^1 = D^1 + ND^{1-1}$ et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
T^{n+1} &= T^n \times T \\
&= (D^n + nND^{n-1}) \times T \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= (D^n + nND^{n-1}) \times (N + D) \quad \text{car } N = T - D \\
&= D^n N + nND^{n-1}N + D^{n+1} + nND^n \\
&= ND^n + nN^2D^{n-1} + D^{n+1} + nND^n \quad \text{car } ND = DN \\
&= D^{n+1} + (n+1)ND^n \quad \text{car } N^2 = 0_3.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, à savoir :
$$T^n = D^n + nND^{n-1}.$$

(c) La matrice D étant diagonale, on a $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$. On a alors $nND^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$, on retrouve bien $T^0 = I_3$, cette formule est donc bien valable pour $n = 0$.

(d) Rappelons qu'on a montré que $A^n = PT^nP^{-1}$. Effectuons ces produits matriciels, on obtient :

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - n - 3 & -4 \times 2^n + \frac{3}{2}n + 4 & 2^n - \frac{n}{2} - 1 \\ 4 \times 2^n - 2n - 4 & -4 \times 2^n + 3n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4 \times 2^n - 4n - 4 & -4 \times 2^n + 6n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix}.$$

5. (a) Pour déterminer u_n, il suffit juste de déterminer la dernière ligne X_n. On a $X_n = A^n X_0$ et on obtient

$$u_n = 4\left(1 - \frac{n+1}{2^n}\right).$$

(b) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{2^n} = 0$ par croissance comparée et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4.}$

Problème 2 *Etude d'une fonction*

1. (a) Calculons le discriminant du polynôme de degré 2 $x^2 - xe + e$:

$$\Delta = (-e)^2 - 4e \simeq 7,3 - 10,8 = -3,5 < 0\,.$$

Ainsi, le polynôme $x^2 - xe + e$ est toujours du signe de son coefficient dominant, *i.e* :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad x^2 - xe + e > 0\,.$$

(b) Calculons le discriminant de P :

$$\Delta = (-2e)^2 - 4 \times 2 \times (e^2 - 2e) = 4e^2 - 8e^2 + 16e = -4e^2 + 16e = 4e(4 - e) \simeq 14,04 > 0$$

L'équation $P(x) = 0$ admet donc deux racines distinctes :

$$\alpha = \frac{2e - \sqrt{4e(4-e)}}{4} \quad \text{et } \beta = \frac{2e + \sqrt{4e(4-e)}}{4}\,.$$

On en déduit le tableau de signe de P :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. (a) La fonction f est bien définie si $x^2 - xe + e > 0$. Ce qui est le cas pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la question 1.(a). Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.}$

(b) Calculons :

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 - \ln(0^2 - 0 \times e + e) = 1 - \ln(e) = 1 - 1 = 0 \\
f(1) &= 1 - \ln(1^2 - 1 \times e + e) = 1 - \ln(1 - e + e) = 1 - \ln(1) = 1 \\
f(e-1) &= 1 - \ln((e-1)^2 - (e-1)e + e) = 1 - \ln(1) = 1 \\
f(e) &= 1 - \ln(e^2 - e^2 + e) = 1 - \ln(e) = 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Enfin,

$$f\left(\frac{e}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{2} + e\right) = 1 - \ln\left(e\left(1 - \frac{e}{4}\right)\right) = 1 - \ln(e) - \ln\left(1 - \frac{e}{4}\right) = -\ln\left(1 - \frac{e}{4}\right).$$

Procédons désormais au calcul des limites. On a $x^2 - xe + e = x\left(x - e + \frac{e}{x}\right)$. Or,

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} x - e + \frac{e}{x} = +\infty\,.$$

Donc, par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - xe + e = +\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$. Donc, par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - xe + e) = +\infty$. Et donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. En procédant de la même manière, on obtient également $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

(c) Posons $u(x) = x^2 - xe + e$. Alors, $u'(x) = 2x - e$. Et donc, pour tout réel x,

$$f'(x) = -\frac{2x - e}{x^2 - xe + e} = \frac{e - 2x}{x^2 - xe + e}\,.$$

On a $f'(0) = \frac{e}{e} = 1$ et $f'(e) = \frac{e - 2e}{e^2 - e^2 + e} = \frac{-e}{e} = -1$.
On a vu, à la question 1, que le dénominateur $x^2 - xe + e$ est toujours strictement positif. Par ailleurs, $e - 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{e}{2}$.
On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

(d) Puisque $e \simeq 2,7$, on a $e - 1 \simeq 1,7$ et $\frac{e}{2} \simeq 1,35$. Ainsi,

$$0 \leqslant 1 \leqslant \frac{e}{2} \leqslant e - 1 \leqslant e\,.$$

On a donc le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$		0		1		$\frac{e}{2}$		$e-1$		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$				$+$			0			$-$			
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$-\ln\left(1 - \frac{e}{4}\right)$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. La fonction f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{e}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{e}{2};+\infty\right[$. Ainsi f atteint un maximum en $x=\dfrac{e}{2}$ qui vaut $f\left(\dfrac{e}{2}\right)=-\ln\left(1-\dfrac{e}{4}\right)$.
4. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

Commençons par calculer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
On a $f(0)=0$ et $f'(0)=1$, ainsi l'équation de la tangente est $\boxed{y=x.}$
Calculons l'équation de la tangente au point d'abscisse e.
On a $f(e)=0$ et $f'(e)=-1$, ainsi l'équation de la tangente est $\boxed{y=-x+e.}$

Problème 3

1. **Deux premiers exemples -**

(a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$v_n=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\alpha=\frac{\alpha}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{\alpha}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{\alpha}{2}.$$

Remarque : La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$v_n=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}$$

2. **Un troisième exemple -**

(a) On procède par récurrence.

Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}k(-1)^k=n$ ».

Initialisation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2}k(-1)^k=-1+2=1$ donc $\mathcal{A}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{A}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k k&=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k+(-1)^{2n+1}(2n+1)+(-1)^{2n+2}(2n+2)\\&=n-(2n+1)+(2n+2)\\&=n+1\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\mathcal{A}(n)$ est vraie.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a, d'après la relation précédente :

$$v_{2n}=\frac{1}{2n(2n+1)}\sum_{k=1}^{2n}k(-1)^k=\frac{n}{2n(2n+1)}=\frac{1}{2(2n+1).}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $v_{2n+1}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}k(-1)^k$. Or de la relation précédente, on déduit que $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n+1}k(-1)^k=\sum_{k=1}^{2n}k(-1)^k+(-1)^{2n+1}(2n+1)=n-(2n+1)=-n-1$$

Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$v_{2n+1}=-\frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)}=-\frac{1}{2(2n+1)}$$

(c) Ainsi les deux suites $(v_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(v_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent toutes les deux vers 0 .

(d) Comme les deux suites extraites $(v_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(v_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent toutes les deux vers la même limite (à savoir 0), la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente (et sa limite est 0).

3. **Un quatrième exemple** -

(a) Soit $x \in [0,1]$. Alors $e^x \geqslant e^0 = 1$ car la fonction exp est croissante. Et donc $0 \leqslant e^x - 1$.
Pour montrer la partie droite de l'encadrement, nous allons étudier la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1], f(x) = e^x - 1 - e\cdot x$
La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et : $\forall x \in [0,1], f'(x) = e^x - e = e^x - e^1 \leqslant 0$ (car exp est croissante). Donc f est décroissante sur $[0,1]$ et donc, pour tout $x \in [0,1], f(x) \leqslant f(0) = 0$.
On a donc bien montré que : $\forall x \in [0,1], e^x - 1 \leqslant e\cdot x$.

(b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Alors $\frac{1}{k} \in [0,1]$ et donc, d'après la question précédente, $0 \leqslant e^{\frac{1}{k}} - 1 \leqslant e\cdot \frac{1}{k}$.
Ainsi, en multipliant par k (qui est bien positif), on obtient $0 \leqslant ke^{\frac{1}{k}} - k \leqslant e$. En sommant cet encadrement pour k de 1 à n, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(ke^{\frac{1}{k}} - k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} e \text{ i.e. } 0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} ke^{\frac{1}{k}} - \sum_{k=1}^{n} k \leqslant ne$$

et ainsi

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} ke^{\frac{1}{k}} - \frac{n(n+1)}{2} \leqslant ne$$

En divisant par $n(n+1)$ qui est bien positif, on obtient bien

$$0 \leqslant v_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{e}{n+1}$$

(c) Comme $\frac{e}{n+1} \longrightarrow 0$, d'après la question précédente et le théorème d'encadrement,

$$v_n - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ i.e. } \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

4. **Une situation plus générale**

(a) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}(n+2)v_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} ku_k \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} ku_k + (n+1)u_{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(n(n+1)v_n + (n+1)u_{n+1}\right) \\ &= nv_n + u_{n+1}\end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $nv_{n+1} + 2v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$ i.e. $nv_{n+1} - nv_n = u_{n+1} - 2v_{n+1}$ et donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}\left(u_{n+1} - 2v_{n+1}\right)$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante : $\forall k \in [\![1,n]\!], u_k \geqslant u_n$; et donc

$$v_n \geqslant \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} ku_n = \frac{u_n}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{u_n}{2}$$

(e) D'après les questions 4.(c) et 4.(d) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n \leqslant 0$. Ainsi la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
De plus, elle est minorée par 0 car la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est positive.
On en déduit que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, d'après le théorème de convergence monotone.

(f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$v_{2n} = \frac{1}{2n(2n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} ku_k + \sum_{k=n+1}^{2n} ku_k\right) = \frac{1}{2n(2n+1)}\left(n(n+1)v_n + \sum_{k=n+1}^{2n} ku_k\right)$$

Or, comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante : $\forall k \in [\![n+1, 2n]\!], u_k \leqslant u_{n+1}$. Donc

$$v_{2n} \leqslant \frac{n+1}{2(2n+1)} \cdot v_n + \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k u_{n+1}$$

Or

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k u_{n+1} = u_{n+1} \sum_{k=1}^{n} (k+n) = u_{n+1} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n^2 \right) = u_{n+1} \cdot \frac{n(3n+1)}{2}$$

Donc on obtient finalement

$$v_{2n} \leqslant \frac{n+1}{2(2n+1)} \cdot v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)} \cdot u_{n+1}$$

(g) D'après la question 3.(d) et par conservation des inégalités par passage à la limite, on obtient

$$\ell' \geqslant \frac{\ell}{2}$$

De même d'après la question 3.(f) et par conservation des inégalités par passage à la limite, on obtient

$$\ell' \leqslant \frac{\ell'}{4} + \frac{3\ell}{8} \quad \text{i.e.} \quad \frac{3\ell'}{4} \leqslant \frac{3\ell}{8} \quad \text{i.e.} \quad \ell' \leqslant \frac{\ell}{2}$$

Ainsi $\ell' = \frac{\ell}{2}$.