Devoir Surveillé n° 2

Durée : 4h

Les documents et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet de quatre pages est composé d'un exercice et de trois problèmes. Bon courage !

Exercice 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x}.$$

On considère alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[1, 3]$.
2. En déduire que : $f([1,3]) \subset [1,3]$, c'est à dire que : $\forall x \in [1,3], f(x) \in [1,3]$.
3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [1,3]$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$ où $g = f \circ f$.
   (b) Déterminer v_0 et v_1. En déduire que $v_0 \leqslant v_1$.
   (c) Montrer par récurrence que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = g(w_n)$ où $g = f \circ f$.
   (b) Etudier la monotonie de $(w_n)_{n\geqslant 0}$.
6. En déduire que les suites $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes.
7. Déterminer l'expression de $g(x)$ pour tout $x \in [1,3]$.
8. En déduire les points fixes de g sur cet intervalle, c'est à dire les réels x vérifiant $g(x) = x$.
9. Déterminer les limites respectives de $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$.
10. Conclure.
11. **Python**
    On suppose qu'il est écrit en haut de notre script :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

   (a) **Recopier** et compléter la fonction ci-dessous permettant de définir la fonction f.

```
def f(............):
    y= ............
    return ............
```

(b) **Recopier** et compléter le programme ci-dessous permettant de tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[1, 3]$.

```
x=np.arange(............)
plt.plot(................)
```

(c) **Recopier** et compléter la fonction ci-dessous qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.

```
def suiteexo2(............):
    u = ............
    for ......................  :
        u = ............
    return  ............
```

(d) Modifier la fonction précédente pour que prenant, un entier n en entrée, elle renvoie un vecteur contenant toutes les valeurs u_0, u_1, ..., u_n.

(e) Que faut-il écrire pour tracer les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Problème 1 *Suite récurrente et matrice*

Soit M une matrice carrée d'ordre 3 et I la matrice d'unité 3. On pose par convention : $M^0 = I$.

On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 telle que :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

et pour tout entier naturel n, soit X_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer X_0 et X_1.
2. (a) Justifier pour tout entier naturel n, l'égalité : $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation : $X_n = A^n X_0$.
3. Soient P, Q et T les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer le produit PQ. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P^{-1}.
   (b) Calculer les produits PT et AP. En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité : $A^n = PT^nP^{-1}$.
4. Soit D la matrice définie par :

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   On pose : $N = T - D$.
   (a) Déterminer pour tout entier $k \geqslant 2$, la matrice N^k.
   (b) Vérifier que $DN = ND$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$T^n = D^n + nND^{n-1}.$$

(c) En déduire que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette formule est-elle valable pour $n = 0$?

(d) En déduire pour tout entier n, l'expression de la matrice A^n.

5. (a) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.

   (b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Problème 2 *Etude d'une fonction*

Dans tous les calculs et expressions, la lettre « e » désigne l'exponentielle de 1. *On donne :* $\mathrm{e} \simeq 2,7$.

1. (a) Montrer que, pour tout réel x,

$$x^2 - x\mathrm{e} + \mathrm{e} > 0\,.$$

   (b) On note, pour tout réel x,

$$P(x) = 2x^2 - (2\mathrm{e})x + \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}\,.$$

   Calculer les racines de P, notées α et β, et en déduire le signe de $P(x)$ en fonction des différentes valeurs de x.

On considère alors la fonction f définie par

$$f(x) = 1 - \ln(x^2 - x\mathrm{e} + \mathrm{e})\,.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2. (a) Déterminer le domaine de définition de f.

   (b) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(e-1)$ et $f(\mathrm{e})$. Vérifier que

$$f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}}{4}\right)\,.$$

   (c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (d) Calculer $f'(x)$, puis étudier son signe. Vérifier que $f'(0) = 1$ et $f'(\mathrm{e}) = -1$.

   (e) En utilisant $\mathrm{e} \simeq 2,7$, ordonner les nombres 0, 1, $e-1$, e, $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ puis dresser le tableau de variations de f en faisant figurer les valeurs étudiées en **2.(b)**.

3. Montrer que f admet un maximum sur son intervalle de définition et le déterminer.

4. Déterminer l'équation des tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisse 0 et e.

Problème 3

Pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de réels, on définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

1. **Deux premiers exemples.**
   (a) Soit un réel α. On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite constante égale à α.
   Calculer v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   (b) Dans cette question, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n}$. Calculer v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. **Un troisième exemple.** Dans cette question, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^n$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\sum_{k=1}^{2n} k(-1)^k = n$$

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les expressions respectives de v_{2n} et v_{2n+1} en fonction de n.

   (c) Déterminer ensuite les limites respectives des suites $(v_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(v_{2n+1})_{n\geqslant 0}$.

   (d) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

3. **Un quatrième exemple.** On suppose dans cette question que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{1/n}$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1], 0 \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant \mathrm{e} \times x$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant k\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} - k \leqslant \mathrm{e}$ puis montrer que,
   $$0 \leqslant v_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

   (c) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et donner sa limite.

4. **Une situation plus générale.** Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et à valeurs positives.
   (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note ℓ sa limite.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, (n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$.

   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1})$.

   (d) Montrer par ailleurs que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$v_n \geqslant \frac{u_n}{2}$$

   (e) En déduire alors que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante puis justifier qu'elle converge. On note ℓ' sa limite.

   (f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$v_{2n} = \frac{n(n+1)v_n}{2n(2n+1)} + \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} k u_k \leqslant \frac{n+1}{2(2n+1)} \cdot v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)} \cdot u_{n+1}$$

   (g) Conclure alors que $\ell' = \dfrac{\ell}{2}$.