Devoir surveillé n° 2

Durée : 4h

Les documents et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet de quatre pages est composé de trois exercices et de deux problèmes. Bon courage !

Exercice 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère le polynôme $P(x) = 3x^3 + 13x^2 - 11x - 5$.

1. Factoriser au maximum le polynôme P.
2. Résoudre l'inéquation suivante : $\quad (I) \quad 3\mathrm{e}^{2x} + 13\mathrm{e}^{x} - 11 > 5\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 2 *Etude de fonctions*

Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_\varphi$ de φ.
2. On introduit la fonction h définie par $h(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)$.
   (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_h$ de h.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_\varphi$, on a :
   $$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)(\ln(1-x))^2}.$$
   (c) Calculer la dérivée de h.
   (d) Résoudre sur $]-1;1[$ l'inéquation : $\ln(1-x) < \ln(1+x)$.
   (e) En déduire le signe de h'.
   (f) Dresser le tableau de variations de h.
   (g) En déduire le signe de h.
   (h) Dresser le tableau de variations de φ.
3. Résoudre sur $\mathcal{D}_\varphi$ l'équation $\varphi(x) = -2$.
4. **Python**
   (a) Recopier et compléter la fonction suivante permettant de définir la fonction φ.

```
def phi(................):
    y=................
    return ................
```

   (b) Recopier et compléter les instructions suivantes permettant de tracer la courbe de φ sur son domaine de définition.

```
import matplotlib.pyplot as plt
x1=np.arange(.....  , ....... , 0.1)
plt.plot(........ , ........)
```

Exercice 3

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0=1, u_1=e$ et : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=\sqrt{u_{n+1}u_n}$.
   (a) Vérifier, pour tout $n\in\mathbb{N}$, que u_n est bien défini et strictement positif.
   (b) Montrer que la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 0}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 .
   (c) En déduire la valeur de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   (d) Recopier et compléter le script suivant pour qu'étant donné un entier n, il calcule u_n :

```
def calcul_suite1(........):
    v =
    u =
    for .................................. :
        w =
        v =
        u =
    return(..........)
```

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0=1, u_1=2$ et $u_2=3$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+3}=2u_{n+2}+5u_{n+1}-6u_n.$$

   (a) Montrer que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 .
   (b) Déterminer l'expression de $(u_{n+1}-u_n)$ en fonction de n.
   (c) En déduire la valeur de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Problème 1

Partie I
On considère les matrices :

$$\Delta=\begin{pmatrix}3&1&0\\-2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad N=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

On pose également : $A=\Delta+N$.

1. Calculer N^2 puis en déduire N^k pour tout entier $k\geqslant 2$.
2. (a) Calculer PQ et QP.
   (b) Vérifier que $Q\Delta P=D$ avec $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
   (c) Montrer que $\Delta=PDQ$.
   (d) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad \Delta^n=PD^nQ$.
   (e) En déduire les neufs coefficients de la matrice Δ^n.
3. (a) Vérifier que : $\Delta N=N\Delta$.
   (b) Montrer par récurrence que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad A^n=\Delta^n+nN\Delta^{n-1}.$$

   (c) En déduire les neufs coefficients de la matrice A^n.

Partie II
Dans cete partie, nous allons étudier les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0=1,\quad y_0=1,\quad z_0=1\quad \text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1}&=&3x_n&+&y_n&-&z_n\\ y_{n+1}&=&-\ 2x_n&&&+&2z_n\\ z_{n+1}&=&&&&&z_n\end{array}\right.$$

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ où A est la matrice définie dans la partie I.
2. Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
3. En utilisant la question **3.(c)** de la partie précédente, déterminer l'expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Partie III

Dans cette partie, on propose une autre méthode afin d'étudier les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la partie II.

1. (a) En utilisant la définition de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer directement la valeur de z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Exprimer alors x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n.
2. On introduit alors la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $r_n = x_n + y_n$ pour tout entier naturel n.
   (a) Établir que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et préciser sa raison.
   (b) En déduire l'expression de $x_n + y_n$ en fonction de n.
3. On introduit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = 2x_n + y_n$ pour tout entier naturel n.
   (a) Prouver que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.
   (b) En déduire l'expression de $2x_n + y_n$ en fonction de n.
4. En utilisant les questions **2** et **3**, retrouver les résultats de la question **3** de la partie II.

Problème 2

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. Expliciter $f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. (a) Calculer de deux manières différentes $f_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
3. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} \leqslant 4$ puis que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$.

Partie II

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{a + x}$.

Définitions :

- *On dit qu'un intervalle I est stable par f dès lors que : $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.*
- *On dit qu'un réel x est un point fixe de f dès lors que $f(x) = x$.*

1. Déterminer l'ensemble de définition de f que l'on notera $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que l'intervalle $\mathcal{D}_f$ est stable par f.
3. (a) Résoudre l'équation $\sqrt{a + x} = x$, d'inconnue x.
   (b) En déduire que f admet un unique point fixe sur son ensemble de définition. On le notera p dans la suite de l'exercice.
4. Montrer que l'intervalle $[0, p]$ est stable par f.
5. Montrer que l'intervalle $[p, +\infty[$ est stable par f.
6. (a) Résoudre l'inéquation $\sqrt{a + x} \leqslant x$ d'inconnue x.
   (b) Déterminer le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}^+$.

   Dans la suite, on considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathcal{D}_f$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
8. On suppose dans cette question que $u_0 \geqslant p$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant p$.
   (b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

9. On suppose dans cette question que $u_0 \leqslant p$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
10. *Application* : Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$x_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}$$

où il y a $(n+1)$ racines carrées.

Partie III

Dans cette partie et la suivante, on considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} k^{2^{n+2-k}}$.

On pose également $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle dont le terme général est

$$u_n = \sqrt{a_0+\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\ldots+\sqrt{a_n}}}}.$$

Nous admettrons que si la suite $\left(a_n^{\frac{1}{2^n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1. Calculer a_1, a_2, u_0, u_1 et u_2.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{\ln(a_n)}{2^n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{\ln(k)}{2^{k-2}}$.
3. Montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[, \quad \ln(x) \leqslant x$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{\ln(a_n)}{2^n} \leqslant 8$.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Partie IV

1. Ecrire une fonction Python qui, étant donné un entier n, renvoie le calcul de a_n.
2. On peut démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n-1} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}.$$

(a) En utilisant cette relation, compléter le script Python suivant permettant de calculer et d'afficher u_{100}.

```
n = .........
u = ...........
for i in range(n-1,0,-1)
    u = .................
print (...........)
```

La commande `range(n-1, 0, -1)` *renvoie le tableau des entiers de 1 à n-1 dans l'ordre décroissant et la commande* `print` *permet d'afficher un résultat.*

(b) Expliquer comment utiliser ce programme pour conjecturer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

