

Corrigé du DS n° 1

Exercice 1

1. • $A = \sqrt{3 \times 16} - \sqrt{3 \times 9} - \frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} - \sqrt{9} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = \boxed{0}$
- $B = \frac{x^{12} \times x^{-4}}{x^3 \times x^{-1}} = \frac{x^8}{x^2} = \boxed{x^6}$
- $C = \frac{9}{\sqrt{2 \times 121}} \times \frac{\sqrt{2 \times 49}}{5} = \frac{9}{11\sqrt{2}} \times \frac{7\sqrt{2}}{5} = \boxed{\frac{63}{55}}$
2. On a :

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \end{aligned}$$

Or, $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$. Ainsi, on a bien

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

3. Pour tout entier n et pour tout $x \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Posons $X = x^2$. Alors, $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \iff X^2 - 13X + 36 = 0$. Calculons le discriminant de cette équation : $\Delta = 169 - 144 = 25$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$X_1 = \frac{13-5}{2} = 4 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{13+5}{2} = 9$$

Or,

$$X = 4 \iff x = 2 \text{ ou } x = -2$$

$$X = 9 \iff x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Donc, $\boxed{\mathcal{S} = \{-3; -2; 2; 3\}}$.

2. On commence par remarquer que l'équation est seulement définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 0, 2\}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 0, 2\}$, on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x} < \frac{1}{x+7} &\iff \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x+7} < 0 \\
 &\iff \frac{x(x+7)}{(x-2)x(x+7)} + \frac{3(x-2)(x+7)}{(x-2)x(x+7)} - \frac{(x-2)x}{(x-2)x(x+7)} < 0 \\
 &\iff \frac{x^2 + 7x + 3x^2 + 21x - 6x - 42 - x^2 + 2x}{(x-2)x(x+7)} < 0 \\
 &\iff \frac{3x^2 + 24x - 42}{(x-2)x(x+7)} < 0 \\
 &\iff \frac{3(x^2 + 8x - 14)}{(x-2)x(x+7)} < 0
 \end{aligned}$$

Calculons le discriminant de $x^2 + 8x - 14$: $\Delta = 64 + 56 = 120$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{120}}{2} = -4 - \sqrt{30} \simeq -9 \quad \text{et} \quad x_2 = -4 + \sqrt{30} \simeq 1$$

Par ailleurs, on a $x - 2 = 0 \iff x = 2$ et $x + 7 = 0 \iff x = -7$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	x_1	-7	0	x_2	2	$+\infty$
$x^2 + 8x - 14$	+	0	-	-	-	0	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$x + 7$	-	-	0	+	+	+	+
$\frac{3(x^2 + 8x - 14)}{(x-2)x(x+7)}$	-	0	+	-	+	0	-

Ainsi, $\mathcal{S} =]-\infty; x_1[\cup]-7; 0[\cup]x_2; 2[$.

3. On commence par déterminer le domaine de définition de l'équation.

A cause de la racine, il faut que $2 - x \geq 0$ soit $x \leq 2$ soit $x \in]-\infty, 2]$. On remarque de plus que les solutions sont forcément positives car $\forall x \in]-\infty, 2]$, $\sqrt{2-x} \geq 0$ donc il faut $\frac{x}{2} \geq 0$. Soit $x \in [0, 2]$, on a :

$$\sqrt{2-x} = \frac{x}{2} \iff 2-x = \frac{x^2}{4} \iff x^2 + 4x - 8 = 0.$$

Calculons le discriminant de ce polynôme de degré 2 : $\Delta = 48$ donc $x_1 = \frac{-4 - \sqrt{48}}{2} = \frac{-4 - 4\sqrt{3}}{2} = -2 - 2\sqrt{3}$ et $x_2 = -2 + 2\sqrt{3}$. On remarque que $x_1 < 0$ donc $x_1 \notin [0, 2]$ et que $\sqrt{3} < 2$ donc $-2 + 2\sqrt{3} < 4 - 2$ et $x_2 > 0$ i.e. $x_2 \in]0, 2]$.

Ainsi $\mathcal{S} = \{-2 + 2\sqrt{3}\}$.

Remarque Il est essentiel d'avoir x positif pour écrire la suite d'équivalences ci-dessus. En effet, la fonction carré n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ mais seulement sur $\mathbb{R}_+$ (ou $\mathbb{R}_-$).

Exercice 3 Logique et raisonnements

1. Raisonnons par double implication. Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $b \in \mathbb{R}$,

($\Rightarrow$) Supposons que $(-1)^k a = b$ alors on a :

$$(-1)^k b = (-1)^k \times (-1)^k a = (-1)^{2k} a = 1 \times a = a.$$

($\Leftarrow$) Supposons que $a = (-1)^k b$ alors on a :

$$(-1)^k a = (-1)^k \times (-1)^k b = (-1)^{2k} b = 1 \times b = b.$$

2. (a) • La proposition (A) est fausse. Supposons qu'elle soit vraie alors il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}, x_0 + y > 0$.
 Si $x_0 \leq 0$ alors en prenant $y = 0$, on a $x_0 = y = x_0 > 0$. Absurde.
 Si $x_0 > 0$ alors en prenant $y = -2x_0$, on a $x_0 + y = -x_0 > 0$. Absurde. Ainsi il n'existe pas un tel x_0 .
 • La proposition (B) est vraie. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$,
 si $x < 0$, posons $y = -2x$ alors $x + y = -x > 0$.
 Si $x > 0$, $y = 0$ convient.
 Si $x = 0$, tout $y > 0$ convient.
 • La proposition (C) est fausse, prenons $x = -1$ et $y = -2$ par exemple.
 • La proposition (D) est vraie. Par exemple, $x = -1$ fonctionne : $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 > -1$.

(b) (non A) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$

(non B) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$

(non C) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$

(non D) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x$

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$, supposons que $a \leq b$ alors

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{a+a}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{a+b}{2} \geq a.$$

On a aussi :

$$\sqrt{ab} \leq \sqrt{b \times b} \quad \text{soit} \quad \sqrt{ab} \leq b \quad (\sqrt{b^2} = b \text{ car } b \geq 0).$$

et

$$\sqrt{ab} \geq \sqrt{a \times a} \quad \text{soit} \quad \sqrt{ab} \geq a \quad (\sqrt{a^2} = a \text{ car } a \geq 0)$$

d'où

$$a \leq \sqrt{ab} \leq b.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors on a de manière immédiate que $n(n+1) \in \mathbb{N}$. Pour la parité, raisonnons par disjonction de cas, supposons dans un premier temps que n est pair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ donc

$$n(n+1) = 2k(2k+1) = 2(k(2k+1)) \quad \text{et } k(2k+1) \in \mathbb{N}$$

ainsi $n(n+1)$ est pair. Supposons maintenant que n est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ donc

$$n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 4k^2 + 4k + 2k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1) \quad \text{et } 2k^2 + 2k + 1 \in \mathbb{N},$$

ainsi $n(n+1)$ est pair.

En conclusion, $n(n+1)$ est bien un entier pair.

Exercice 4

1. (a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On résout l'équation suivante :

$$\begin{aligned} x &= 3x + 2 && \Longleftrightarrow && -2x = 2 \\ &&& \Longleftrightarrow && x = -1 \end{aligned}$$

On introduit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 1$. Montrons qu'elle est géométrique, soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= 3u_n + 2 + 1 \\ &= 3u_n + 3 \\ &= 3(u_n + 1) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 2$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2 \times 3^n$.

On en déduit que pour tout n entier, $u_n = 2 \times 3^n - 1$.

(b) On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n (2 \times 3^k - 1) = 2 \sum_{k=0}^n 3^k - \sum_{k=0}^n 1 \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= 2 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} - (n+1) = 2 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{-2} - n - 1 = 3^{n+1} - n - 2\end{aligned}$$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\sum_{k=0}^n u_k = 3^{n+1} - n - 2}$.

(c)

```
1 def suite1(n):
2     u=2*3**n-1
3     return u
```

2. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est donnée par

$$x^2 = x - \frac{1}{4} \iff x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

Le discriminant associé à cette équation est

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 1 = 0$$

L'unique solution réelle est $x_0 = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, il existe α et β deux réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (\alpha + \beta n) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En utilisant $v_0 = 1$ et $v_0 = \alpha$ puis $v_1 = 3$ et $v_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, on en déduit le système

$$\begin{aligned}\begin{cases} \alpha = 1 \\ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 3 \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ 1 + \beta = 6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 5 \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (1 + 5n) \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

3. (a) D'après l'énoncé, on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} + b_{n+1} &\iff a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n + 3b_n \\ &\iff a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n + 3(a_{n+1} - 2a_n) \\ &\iff a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n\end{aligned}$$

Donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien $\boxed{\text{une suite récurrente linéaire d'ordre 2}}$.

(b) Pour déterminer son expression en fonction de n , on commence par poser l'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 5x - 4 \iff x^2 - 5x + 4 = 0$$

Le discriminant associé à cette équation est

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 9$$

L'équation caractéristique a deux solutions qui sont :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{5-3}{2} & x_2 &= \frac{5+3}{2} \\ x_1 &= 1 & x_2 &= 4\end{aligned}$$

Dans ce cas, il existe α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha \times 1^n + \beta \times 4^n$$

En utilisant $a_0 = 0$ et $a_1 = 2a_0 + b_0 = 1$, on en déduit le système d'équation

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 4\beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\beta \\ 3\beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{1}{3} + \frac{4^n}{3} \text{ et } b_n = a_{n+1} - 2a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 4^n.$$

Exercice 5

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \text{ et } g(x) = -\frac{x+1}{x-2}$$

1. La quantité $\frac{1}{x+1}$ est définie si : $x+1 \neq 0$ i.e. si $x \neq -1$. Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.$

La quantité $\frac{1}{x-2}$ est définie si : $x-2 \neq 0$ i.e. si $x \neq 2$. Ainsi, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[.$

2. On note $a = \frac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}$

(a) On simplifie l'expression de a , pour cela on multiplie par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} a &= \frac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}} = \frac{(-2\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} \\ &= \frac{-2\sqrt{2}-4-1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{-5-3\sqrt{2}}{-1} = 5+3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } a = 5+3\sqrt{2}.$$

(b) Commençons par calculer :

$$a+1 = 6+3\sqrt{2} = 3(2+\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad a-2 = 3+3\sqrt{2} = 3(1+\sqrt{2}).$$

On en déduit que :

$$g(a) = -\frac{a+1}{a-2} = -\frac{3(2+\sqrt{2})}{3(1+\sqrt{2})} = -\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

Simplifions au maximum ce résultat en multipliant par la quantité conjuguée :

$$g(a) = -\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -\frac{(2+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{1-2} = 2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-2 = -\sqrt{2}.$$

$$\text{Ainsi } g(a) = -\sqrt{2}.$$

(c) On calcule

$$f(g(a)) = \frac{2g(a)-1}{g(a)+1} = \frac{-2\sqrt{2}-1}{-\sqrt{2}+1}.$$

On reconnaît l'expression de a donnée dans l'énoncé alors $f(g(a)) = a$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On a :

$$f(g(x)) = \frac{2g(x)-1}{g(x)+1}.$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} 2g(x) - 1 &= -2\frac{x+1}{x-2} - 1 \\ &= \frac{-2x-2-(x-2)}{x-2} \\ &= \frac{-2x-2-x+2}{x-2} \\ &= \frac{-3x}{x-2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g(x) + 1 &= -\frac{x+1}{x-2} + 1 \\ &= \frac{-x-1+(x-2)}{x-2} \\ &= \frac{-x-1+x-2}{x-2} \\ &= \frac{-3}{x-2} \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\frac{1}{g(x)+1} = \frac{x-2}{-3}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{2g(x)-1}{g(x)+1} \\ &= (2g(x)-1) \frac{1}{g(x)+1} \\ &= \frac{-3x}{x-2} \frac{x-2}{-3} \\ &= x \end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(g(x)) = x$.

3. Un peu de Python

- (a) Il s'agit de la bibliothèque numpy.
 (b) Pour importer cette bibliothèque, il faut écrire la commande `import numpy as np`
 (c) On peut écrire par exemple :

```
1 def f(x):
2     y= (2*x-1)/(x+1)
3     return y
```

- (d) On peut écrire par exemple :

```
1 def g(x):
2     y= -(x+1)/(x-2)
3     return y
```

- (e) On peut écrire par exemple :

```
1 a=(-2*np.sqrt(2)-1)/(1-np.sqrt(2))
2 b=g(a)
```

- (f) On peut écrire par exemple :

```
1 f(b)
```

Problème 1 Etude d'une suite homographique

1. (a) Notons pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geq 0$ ».

Initialisation ($n = 0$) On a $u_0 = 2 \geq 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence $u_n \geq 0$ donc $u_n + 4 > 0$ et $3 + 2u_n \geq 0$ ainsi par quotient

$$u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{u_n + 4} \geq 0.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

- (b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -4$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + 4 \neq 0$, l'expression de u_{n+1} est donc bien définie et on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bien définie**.
2. (a) D'après la question 1.(a), pour tout entier n , $u_n \geq 0$ donc $u_n \neq -3$ soit $u_n + 3 \neq 0$. Ainsi la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{3+2u_n}{u_n+4} - 1}{\frac{3+2u_n}{u_n+4} + 3} = \frac{\frac{3+2u_n-(u_n+4)}{u_n+4}}{\frac{3+2u_n+3(u_n+4)}{u_n+4}} \\ &= \frac{3+2u_n-(u_n+4)}{u_n+4} \times \frac{u_n+4}{3+2u_n+3(u_n+4)} \\ &= \frac{u_n-1}{5u_n+15} = \frac{1}{5} \times \frac{u_n-1}{u_n+3} = \frac{1}{5} v_n. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+3} = \frac{1}{5}$** .

- (c) On peut donc en déduire son expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \neq 0$ donc $\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \neq 1$. Ainsi **$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 1$** .

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $v_n - 1 \neq 0$, on peut écrire :

$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3} \iff (u_n+3)v_n = u_n-1 \iff u_nv_n + 3v_n = u_n-1 \iff (v_n-1)u_n = -1-3v_n \iff u_n = \frac{1+3v_n}{1-v_n}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, **$u_n = \frac{1+3v_n}{1-v_n}$** .

4. D'après le résultat de la question 3.(b), on peut donc écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1+3\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}.$$

Problème 2

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation

$$a^b = b^a$$

où a et b sont des entiers strictement positifs tels que $a < b$

1. Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\begin{aligned} a^b &= b^a \\ \iff e^{b \ln(a)} &= e^{a \ln(b)} \\ \iff b \ln(a) &= a \ln(b) \quad (\text{par application de } \ln) \\ \iff \frac{\ln(a)}{a} &= \frac{\ln(b)}{b} \\ \iff f(a) &= f(b) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } a^b = b^a \Leftrightarrow f(a) = f(b)}$$

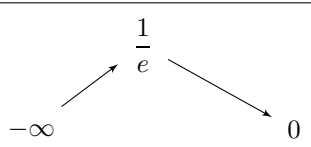
2. (a) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle le produit des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ dérivables sur $]0, +\infty[$.
Calculons sa dérivée,

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

comme $x^2 > 0$ sur $]0, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$. On a alors :

$$1 - \ln(x) > 0 \iff 1 > \ln(x) \iff e^1 > x.$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

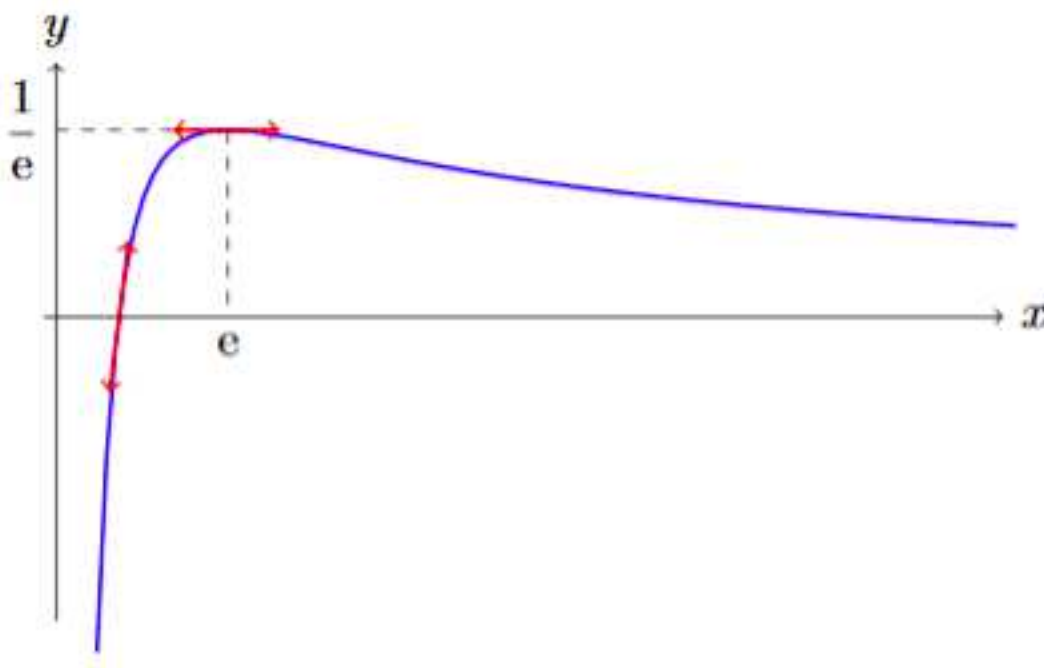
x	0	e	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

- (b) L'étude des variations de f réalisée à la question précédente nous permet de montrer que la fonction f atteint son maximum $\frac{1}{e}$ en $x = e$.

- (c) Au point d'abscisse 1, la fonction f admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = x - 1.$$

- (d) On en déduit la représentation graphique suivante.



3. On souhaite trouver les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(a) = f(b)$ et $a \leq b$. On cherche donc tous les couples d'entiers différents possédant la même image par f . Or d'après l'étude précédente :

- si $y > \frac{1}{e}$, y n'admet pas d'antécédent par f
- si $y = \frac{1}{e}$, y admet un unique antécédent par f (il s'agit de e)
- si $0 < y < \frac{1}{e}$, y admet deux antécédents par f . Le plus petit est situé dans l'intervalle $]0, e[$ et plus précisément dans l'intervalle $]1, e[$ car $f(1) = 0$. Le plus grand est situé dans l'intervalle $]e, +\infty[$
- si $y \leq 0$, y admet un unique antécédent par f

On en déduit que a peut prendre toute valeur entière de l'intervalle $]1, e[$.

Comme $e \simeq 2,71$, la seule valeur possible est $\boxed{a = 2}$.

4. Ici, on a fixé $a = 2$ et on cherche les solutions entières $b \neq 2$ à l'équation : $f(2) = f(b)$ D'après l'étude précédente, si b existe, il est unique et situé dans l'intervalle $]e, +\infty[$

- Si $b = 3$, on a : $2^b = 2^3 = 8 \neq 9 = 3^2 = b^2$
- Si $b = 4$, on a : $2^b = 2^4 = 16 = 16 = 4^2 = b^2$

$\boxed{\text{L'équation } 2^b = b^2 \text{ admet comme unique solution } b = 4}$

5. D'après ce qui précède,

$\boxed{\text{l'équation } a^b = b^a \text{ admet comme unique couple entier solution (avec } a < b) \text{ le couple } (2, 4).}$