

Corrigé du DS n° 1

Exercice 1

1. • $A = 4\sqrt{4 \times 6} - 5\sqrt{16 \times 6} + 4\sqrt{9 \times 6} = 8\sqrt{6} - 20\sqrt{6} + 12\sqrt{6} = 0$. Ainsi, $A = 0$
- $B = \frac{x^{15} \times x^2}{x^{-3}} = \frac{x^{17}}{x^{-3}} = x^{20}$. Ainsi, $B = x^{20}$
- $C = \frac{(1 - \sqrt{3})^2}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} + \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 3}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{8}{1 - 3} = -4$. Ainsi, $C = -4$
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, multiplions par la quantité conjuguée, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \times \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1})^2 - (\sqrt{k})^2} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

Exercice 2

1. On a :

$$\begin{aligned} 4(x-2) - 3(6-2(3-4x)) + 3(7-2x) &= 4x-8-3(6-6+8x)+21-6x \\ &= 4x-8-24x+21-6x \\ &= -26x+13 \end{aligned}$$

$$\text{Et donc, } 4(x-2) - 3(6-2(3-4x)) + 3(7-2x) = 0 \iff -26x+13=0 \iff -26x=-13 \iff x = \frac{-13}{-26} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc, } \mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

2. Commençons par déterminer le domaine de définition de l'inéquation. Cette inéquation est bien définie pour $x \neq -2$ donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Résolvons-la :

$$(E) \iff \frac{x-3}{x+2} + 4x - \frac{5x}{x+2} \iff \frac{x-3+4x(x+2)-5x}{x+2} < 0 \iff \frac{4x^2+4x-3}{x+2} < 0.$$

Il nous faut donc étudier le signe de $4x^2+4x-3$ et le signe de $x+2$. Étudions le signe de ces deux polynômes. Pour $x+2$, on a :

$$x+2 > 0 \iff x > -2.$$

Pour $4x^2+4x-3$, on a $\Delta = 64$, $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

On a alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$		
Signe de $4x^2 + 4x - 3$		+	0	-	0	+	
Signe de $x + 2$	-	0		+			
Signe de $\frac{4x^2 + 4x - 3}{x + 2}$	-		+	0	-	0	+

On en déduit la solution $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}[$.

3. Commençons par déterminer le domaine de définition de l'équation. Pour que les racines soient bien définies, il faut que :

$$x - 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x + 4 \geq 0.$$

Ainsi l'équation est bien définie pour $x \in [1; +\infty[$.

Soit $x \in [1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} &= \sqrt{5} \\ \sqrt{x-1} &= \sqrt{5} - \sqrt{x+4} \\ x-1 &= (\sqrt{5} - \sqrt{x+4})^2 \\ x-1 &= 5 - 2\sqrt{5}\sqrt{x+4} + (x+4) \\ -10 &= 2\sqrt{5}\sqrt{x+4} \\ \frac{-5}{\sqrt{5}} &= \sqrt{x+4} \\ \frac{25}{5} &= x+4 \\ x &= 5-4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{1\}$.

4. Commençons par déterminer le domaine de définition de l'inéquation. Pour que les racines soient bien définies, il faut que :

$$x^2 + 9 \geq 0 \quad \text{et} \quad x \geq 0$$

soit $x \geq 0$ car $x^2 + 9 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi l'inéquation est définie sur $[0; +\infty[$.

Soit $x \in [0; +\infty[$, on a :

$$\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x} > 0 \iff \sqrt{x^2 + 9} > \sqrt{x} \iff x^2 + 9 > x \iff x^2 - x + 9 > 0.$$

Calculons le discriminant de ce trinôme. On a $\Delta = -35 < 0$. Ainsi $x^2 - x + 9 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $\mathcal{S} = [0; +\infty[$.

Exercice 3

1.

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Exprimons u_n en fonction de n :

- On reconnaît une suite arithmético-géométrique.
- $\alpha = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3} \iff \alpha = -1$.
- Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n + 1$. Montrons que la suite (w_n) est géométrique :

$$w_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(u_n + 1) = \frac{2}{3}w_n$$

donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = u_0 + 1 = 3 + 1 = 4$.

On sait alors que $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = w_0 \times q^n$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- Or, $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n + 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = w_n - 1$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1$.

2.

$$\begin{cases} u_0 = 1 & u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$$

Exprimons u_n en fonction de n :

- On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- Son équation caractéristique associée (E) est $r^2 = 3r + 4 \iff r^2 - 3r - 4 = 0$.
On trouve $\Delta = 25 = 5^2 > 0$ donc (E) admet deux solutions réelles distinctes

$$r_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \text{ et } r_2 = \frac{3+5}{2} = 4.$$

On sait alors qu'il existe λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda(r_1)^n + \mu(r_2)^n$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda(-1)^n + \mu \times 4^n$.
En particulier, pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 = \lambda + \mu$ et pour $n = 1$, on a $u_1 = 2 = -\lambda + 4\mu$ donc λ et μ vérifient le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 & L_1 \\ -\lambda + 4\mu = 2 & L_2 \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ donne $5\mu = 3$ donc $\mu = \frac{3}{5}$ puis L_1 donne $\lambda = 1 - \mu = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2}{5}(-1)^n + \frac{3}{5} \times 4^n.}$

Exercice 4 *Un peu de logique*

1. On voit que

$$(A) \iff (E) \iff (F) \iff (G)$$

et

$$(B) \iff (C) \iff (D)$$

2. On a :

- non $(A) : \forall a \in \mathbb{R}$, tel que $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq a$
- non $(B) : \exists x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+, \text{ tel que } f(x) \neq a$
- non $(C) : \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \neq f(y)$.

3. On a

- $(A) : (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4)$.
- $(B) : \exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \text{ ou } f(x) = b$

4. Soient les deux propositions suivantes :

- $(A) : \text{La fonction } f \text{ est constante.}$
- $(B) : \forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = f(x)$.

(a) Supposons que la fonction f est constante. Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x+2) = f(x)$. Ainsi $\boxed{(A) \implies (B)}$.

(b) Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(\pi x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, (comme la fonction sin est 2π -périodique)

$$f(x+2) = \sin(\pi(x+2)) = \sin(\pi x + 2\pi) = \sin(\pi x) = f(x)$$

Ainsi f vérifie bien la proposition (B) . La fonction f en revanche n'est pas constante. En effet $f(0) = \sin(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. On peut donc en conclure que la réciproque $(B) \implies (A)$ n'est pas vraie en général car on vient d'exhiber un contre-exemple.

Exercice 5 Une équation fonctionnelle

1. (a) D'après $(\star\star)$ utilisée avec $x = y = 0$, on obtient

$$f(0)f(0) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(0)^2 = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(0) = 0.$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. D'après $(\star\star)$ utilisée avec $y = x$, on a

$$f(x)^2 = \sqrt{x}f(2x) + \sqrt{x}f(2x) = 2\sqrt{x}f(2x)$$

Et ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

- (c) Soient x et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors d'après la question précédente

$$f(x)^2 = 2\sqrt{x}f(2x) \quad \text{et} \quad f(y)^2 = 2\sqrt{y}f(2y)$$

ce qui nous donne, comme $\sqrt{x} \neq 0$ et $\sqrt{y} \neq 0$,

$$f(2x) = \frac{f(x)^2}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad f(2y) = \frac{f(y)^2}{2\sqrt{y}}$$

En réinjectant dans $(\star\star)$, on obtient

$$f(x)f(y) = \sqrt{y} \cdot \frac{f(x)^2}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \frac{f(y)^2}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} (yf(x)^2 + xf(y)^2)$$

- (d) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Alors

$$\begin{aligned} (\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y))^2 &= yf(x)^2 + xf(y)^2 - 2\sqrt{xy}f(x)f(y) \\ &= 2\sqrt{xy} \left(\frac{1}{2\sqrt{xy}} (yf(x)^2 + xf(y)^2) - f(x)f(y) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après la question précédente.

- (e) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. D'après la question 1.(d),

$$\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sqrt{y}f(x) = \sqrt{x}f(y)$$

Comme x et y sont strictement positifs, on peut diviser par $\sqrt{xy}$ cette dernière égalité, et l'on obtient

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{f(y)}{\sqrt{y}}$$

Ceci étant vrai pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on en déduit que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (f) Cette dernière question est plus difficile car c'est à vous de prendre quelques initiatives.

Première étape : Comme la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors il existe un réel α tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \alpha$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \alpha\sqrt{x}$$

Comme $f(0) = 0 = \alpha \cdot \sqrt{0}$, alors on peut finalement écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \alpha\sqrt{x}$$

Deuxième étape : Nous allons ensuite réinjecter ce résultat dans l'égalité $(\star\star)$. On obtient, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$

$$\alpha\sqrt{x} \cdot \alpha\sqrt{y} = \sqrt{y} \cdot \alpha\sqrt{2x} + \sqrt{x} \cdot \alpha\sqrt{2y}$$

i.e.

$$\alpha^2\sqrt{xy} = 2\alpha\sqrt{2xy}$$

Comme ceci est vrai pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, alors en particulier pour $x = y = 1$, cela donne

$$\alpha^2 = 2\alpha\sqrt{2} \quad \text{i.e.} \quad \alpha(\alpha - 2\sqrt{2}) = 0$$

Ainsi $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2\sqrt{2}$. Finalement f est donc bien la fonction nulle ou la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 2\sqrt{2}x$.

2. La fonction nulle est bien sûr solution du problème. Posons $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 2\sqrt{2x}$. Alors, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$\sqrt{y}f(2x) + \sqrt{x}f(2y) = \sqrt{y} \cdot 2\sqrt{4x} + \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{4y} = 4\sqrt{4xy} = 8\sqrt{xy} = 2\sqrt{2x} \cdot 2\sqrt{2y}$$

Donc f est bien solution du problème.

Bilan : ce problème admet donc exactement deux solutions, la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 2\sqrt{2x}$ et la fonction nulle.

3. On peut écrire la fonction suivante :

```
1 def f(x) :
2     y=2*np.sqrt(2*x)
3     return y
```

Problème 1 Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3

1. (a) $v_0 = u_1 + 2u_0 = -5 + 2 \times 4 = 3$ et $v_1 = u_2 + 2u_1 = 13 + 2 \times (-5) = 3$.

Bilan : $v_0 = 3$ et $v_1 = 3$

- (b) $v_{n+2} = u_{n+3} + 2u_{n+2}$. Or, $u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$ donc $v_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2} = 2u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_{n+1} - 2u_n = 2(u_{n+2} + 2u_{n+1}) - (u_{n+1} + 2u_n) = 2v_{n+1} - v_n$.

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$

- (c) La suite (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique associée (E) est $r^2 = 2r - 1 \iff r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r - 1)^2 = 0$. Donc (E) admet une unique solution $r_0 = 1$. On sait alors qu'il existe λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = (\lambda + \mu n)(r_0)^n$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \lambda + \mu n$. En particulier, pour $n = 0$, on a $v_0 = 3 = \lambda$ et pour $n = 1$, on a $v_1 = 3 = \lambda + \mu$ donc $\lambda = 3$ et $\mu = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 3$.

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 3$

- (d) On a montré à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3$ donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite constante.

- (e) Or, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $v_n = u_{n+1} + 2u_n$ et $v_n = 3$ donc $3 = u_{n+1} + 2u_n$ donc $u_{n+1} = -2u_n + 3$.

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -2u_n + 3$.

- (f) La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique. On cherche α tel que $\alpha = -2\alpha + 3$ et on trouve $\alpha = 1$. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n - 1$. Montrons que la suite (w_n) est géométrique : $w_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -2u_n + 3 - 1 = -2u_n + 2 = -2(u_n - 1) = -2w_n$. Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 1 = 4 - 1 = 3$ donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $w_n = 3(-2)^n$. Or, $w_n = u_n - 1$ donc $u_n = w_n + 1$ et donc $u_n = 3(-2)^n + 1$.

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3(-2)^n + 1$

- (g)

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (3(-2)^k + 1) = 3 \sum_{k=0}^n (-2)^k + \sum_{k=0}^n 1 = 3 \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} + (n+1) = 1 - (-2)^{n+1} + n + 1$$

Bilan : $\sum_{k=0}^n u_k = n + 2 - (-2)^{n+1}$.

2. (a) **Montrons par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0$:**

Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0$. »

Initialisation ($n = 0$)

On a $t_0 = u_0 - (-2)^0 = 1$, $t_1 = u_1 - (-2)^1 = 0$ et $t_2 = u_2 - (-2)^2 = -1$. Ainsi $t_2 - 2t_1 + t_0 = -1 + 2 \times 0 + 1 = 0$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On doit donc montrer que $t_{n+3} - 2t_{n+2} + t_{n+1} = 0$.

$$\begin{aligned} t_{n+3} - 2t_{n+2} + t_{n+1} &= t_{n+3} - 2(2t_{n+1} - t_n) + t_{n+1}, && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= t_{n+3} - 3t_{n+1} + 2t_n \\ &= u_{n+3} - (-2)^{n+3} - 3(u_{n+1} - (-2)^{n+1}) + 2(u_n - (-2)^n) \\ &= u_{n+3} + 8(-2)^n - 3u_{n+1} - 6(-2)^n + 2u_n - 2(-2)^n \\ &= u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n \\ &= 0, && \text{par définition de la suite } (u_n). \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n , à savoir :

$$t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0.$$

(b) La suite $(t_n)_n$ étant une suite récurrence linéaire d'ordre 2, on calcule les racines de son équation caractéristique.

$$(E) : \quad r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0.$$

(E) possède donc une racine double $r_0 = 1$. Le terme général de la suite a donc pour expression :

$$t_n = (\lambda + n\mu)1^n = \lambda + n\mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Déterminons les réels λ et μ , on a $t_0 = 1 = \lambda$ et $t_1 = 0 = \lambda + \mu$. Ainsi $\mu = -\lambda = -1$.

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 1 - n.}$

(c) On sait que $u_n = t_n + (-2)^n$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - n + (-2)^n.}$

(d) Calculons la somme, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n (1 - k + (-2)^k) \\ &= \sum_{k=0}^n 1 - \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n (-2)^k, \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= n + 1 - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} \\ &= \frac{-n^2 + n + 2}{2} + \frac{1 - (-2)^{n+1}}{6} \\ &= \frac{-3n^2 + 3n + 8 + (-2)^{n+2}}{6} \end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{\sum_{k=0}^n u_k = \frac{-3n^2 + 3n + 8 + (-2)^{n+2}}{6}.}$

Problème 2

1. Montrons par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 1$:

Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « u_n existe et $u_n \geq 1$. »

• Initialisation ($n = 0$) :

$u_0 = 4$ donc u_0 existe et comme $4 \geq 1$, on a bien $u_0 \geq 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$ donc $u_n + 1 \geq 2$ donc $u_n + 1 \neq 0$ donc $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ existe bien.

D'autre part,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 2 - u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{3u_n - 3}{u_n + 1} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 1}.$$

Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$ donc $u_n - 1 \geq 0$. Or $3 \geq 0$ et $u_n + 1 \geq 2 > 0$ donc $\frac{3(u_n - 1)}{u_n + 1} \geq 0$ donc

$u_{n+1} - 1 \geq 0$ i.e. $u_{n+1} \geq 1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

• Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq 1}$$

2. Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $u_n \neq 2$ ».

Initialisation ($n = 0$) :

$u_0 = 4$ et $4 \neq 2$, donc $u_0 \neq 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $u_{n+1} = 2$. Alors $\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} = 2$ donc $4u_n - 2 = 2u_n + 2$ donc $2u_n = 4$ donc $u_n = 2$. Or, par hypothèse de récurrence, on a $u_n \neq 2$: absurde ! Donc $u_{n+1} \neq 2$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion d'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 2}$$

3. (a) Justifions brièvement que la suite (w_n) est bien définie :

En effet, on vient de montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 2$, donc $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est bien définie}}$

(b) Montrons que la suite (w_n) est géométrique :

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 2} = \frac{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 1}{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2} = \frac{4u_n - 2 - u_n - 1}{4u_n - 2 - 2u_n - 2} = \frac{3u_n - 3}{2u_n - 4} = \frac{3(u_n - 1)}{2(u_n - 2)} = \frac{3}{2}w_n$$

$$\text{Bilan : } \boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{3}{2} \text{ et de premier terme } w_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 - 2} = \frac{4 - 1}{4 - 2} = \frac{3}{2}}$$

(c) Exprimons w_n en fonction de n :

$$\text{Par conséquent, pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N} : w_n = w_0 \times q^n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

$$\text{Bilan : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}$$

4. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n \neq 1$:

Soit n dans $\mathbb{N}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $w_n = 1$. Alors $\frac{u_n - 1}{u_n - 2} = 1$ donc $u_n - 1 = u_n - 2$ et donc $-1 = -2$: absurde ! Donc $w_n \neq 1$.

$$\text{Bilan : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n \neq 1}$$

Exprimons u_n en fonction de w_n :

On sait que $w_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$ donc $w_n(u_n - 2) = u_n - 1$ donc $w_n u_n - 2w_n = u_n - 1$ donc $w_n u_n - u_n = 2w_n - 1$ donc $(w_n - 1)u_n = 2w_n - 1$. Or, d'après la question précédente, on sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n \neq 1$ donc $w_n - 1 \neq 0$ donc on peut écrire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2w_n - 1}{w_n - 1}}$$

5. Expression de u_n en fonction de n :

D'après 4), on sait que $w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ et d'après 5), on sait que $u_n = \frac{2w_n - 1}{w_n - 1}$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}}$$