Corrigé du DS n° 1

Exercice 1

1. • $A = \sqrt{3\times 16} - \sqrt{3\times 9} - \dfrac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = \sqrt{16}\times\sqrt{3} - \sqrt{9}\times\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = \boxed{0}$
   • $B = \dfrac{x^{12}\times x^{-4}}{x^3\times x^{-1}} = \dfrac{x^8}{x^2} = \boxed{x^6}$
   • $C = \dfrac{9}{\sqrt{2\times 121}} \times \dfrac{\sqrt{2\times 49}}{5} = \dfrac{9}{11\sqrt{2}} \times \dfrac{7\sqrt{2}}{5} = \boxed{\dfrac{63}{55}}$
2. On a :

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

   Or, $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$. Ainsi, on a bien

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

3. Pour tout entier n et pour tout $x \neq 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x}\\ &= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x}\\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Posons $X = x^2$. Alors, $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \iff X^2 - 13X + 36 = 0$. Calculons le discriminant de cette équation : $\Delta = 169 - 144 = 25$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$X_1 = \frac{13-5}{2} = 4 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{13+5}{2} = 9$$

   Or,

$$X = 4 \iff x = 2 \text{ ou } x = -2$$
$$X = 9 \iff x = 3 \text{ ou } x = -3$$

   Donc, $\boxed{\mathscr{S} = \{-3; -2; 2; 3\}}$.

2. On commence par remarquer que l'équation est seulement définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 0, 2\}$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 0, 2\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x} < \frac{1}{x+7} &\iff \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x+7} < 0 \\
&\iff \frac{x(x+7)}{(x-2)x(x+7)} + \frac{3(x-2)(x+7)}{(x-2)x(x+7)} - \frac{(x-2)x}{(x-2)x(x+7)} < 0 \\
&\iff \frac{x^2+7x+3x^2+21x-6x-42-x^2+2x}{(x-2)x(x+7)} < 0 \\
&\iff \frac{3x^2+24x-42}{(x-2)x(x+7)} < 0 \\
&\iff \frac{3(x^2+8x-14)}{(x-2)x(x+7)} < 0
\end{aligned}$$

Calculons le discriminant de $x^2+8x-14$: $\Delta = 64 + 56 = 120$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{120}}{2} = -4-\sqrt{30} \simeq -9 \qquad \text{et} \qquad x_2 = -4+\sqrt{30} \simeq 1$$

Par ailleurs, on a $x-2=0 \iff x=0$ et $x+7=0 \iff x=-7$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		-7		0		x_2		2		$+\infty$
$x^2+8x-14$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{3(x^2+8x-14)}{(x-2)x(x+7)}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty; x_1[\cup]-7; 0[\cup]x_2; 2[}$.

3. On commence par déterminer le domaine de définition de l'équation.
A cause de la racine, il faut que $2-x \geqslant 0$ soit $x \leqslant 2$ soit $x \in]-\infty, 2]$. On remarque de plus que les solutions sont forcément positives car $\forall x \in]-\infty, 2]$, $\sqrt{2-x} \geqslant 0$ donc il faut $\dfrac{x}{2} \geqslant 0$. Soit $x \in [0, 2]$, on a :

$$\sqrt{2-x} = \frac{x}{2} \iff 2-x = \frac{x^2}{4} \iff x^2+4x-8 = 0.$$

Calculons le discriminant de ce polynôme de degré 2 : $\Delta = 48$ donc $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{48}}{2} = \dfrac{-4-4\sqrt{3}}{2} = -2-2\sqrt{3}$ et $x_2 = -2+2\sqrt{3}$. On remarque que $x_1 < 0$ donc $x_1 \notin [0, 2]$ et que $\sqrt{3} < 2$ donc $-2+2\sqrt{3} < 4-2$ et $x_2 > 0$ i.e. $x_2 \in]0, 2]$.
Ainsi $\boxed{\mathscr{S} = \{-2+2\sqrt{3}\}}$.

Remarque Il est essentiel d'avoir x positif pour écrire la suite d'équivalences ci-dessus. En effet, la fonction carré n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ mais seulement sur $\mathbb{R}_+$ (ou $\mathbb{R}_-$).

Exercice 3 *Logique et raisonnements*

1. Raisonnons par double implication. Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $b \in \mathbb{R}$,

$(\Rightarrow)$ Supposons que $(-1)^k a = b$ alors on a :

$$(-1)^k b = (-1)^k \times (-1)^k a = (-1)^{2k} a = 1 \times a = a.$$

$(\Leftarrow)$ Supposons que $a = (-1)^k b$ alors on a :

$$(-1)^k a = (-1)^k \times (-1)^k b = (-1)^{2k} b = 1 \times b = b.$$

2. (a)
   - La proposition (A) est fausse. Supposons qu'elle soit vraie alors il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R},\ x_0 + y > 0$.
     Si $x_0 \leqslant 0$ alors en prenant $y = 0$, on a $x_0 = y = x_0 > 0$. Absurde.
     Si $x_0 > 0$ alors en prenant $y = -2x_0$, on a $x_0 + y = -x_0 > 0$. Absurde. Ainsi il n'existe pas un tel x_0.
   - Le proposition (B) est vraie. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$,
     si $x < 0$, posons $y = -2x$ alors $x + y = -x > 0$.
     Si $x > 0$, $y = 0$ convient.
     Si $x = 0$, tout $y > 0$ convient.
   - La proposition (C) est fausse, prenons $x = -1$ et $y = -2$ par exemple.
   - La proposition (D) est vraie. Par exemple, $x = -1$ fonctionne : $\forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > -1$.

   (b) (non A) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leqslant 0$
   (non B) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leqslant 0$
   (non C) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leqslant 0$
   (non D) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leqslant x$

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$, supposons que $a \leqslant b$ alors

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{a+a}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{a+b}{2} \geqslant a.$$

On a aussi :

$$\sqrt{ab} \leqslant \sqrt{b \times b} \quad \text{soit} \quad \sqrt{ab} \leqslant b \quad (\sqrt{b^2} = b \text{ car } b \geqslant 0).$$

et

$$\sqrt{ab} \geqslant \sqrt{a \times a} \quad \text{soit} \quad \sqrt{ab} \geqslant a \quad (\sqrt{a^2} = a \text{ car } a \geqslant 0)$$

d'où

$$a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors on a de manière immédiate que $n(n+1) \in \mathbb{N}$. Pour la parité, raisonnons par disjonction de cas, supposons dans un premier temps que n est pair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ donc

$$n(n+1) = 2k(2k+1) = 2(k(2k+1)) \quad \text{et } k(2k+1) \in \mathbb{N}$$

ainsi $n(n+1)$ est pair. Supposons maintenant que n est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ donc

$$n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 4k^2 + 4k + 2k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1) \quad \text{et } 2k^2 + 2k + 1 \in \mathbb{N},$$

ainsi $n(n+1)$ est pair.
En conclusion, $n(n+1)$ est bien $\boxed{\text{un entier pair}}$.

Exercice 4

1. (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On résout l'équation suivante :

$$\begin{aligned} x = 3x + 2 &\iff -2x = 2 \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 1$. Montrons qu'elle est géométrique, soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= 3u_n + 2 + 1 \\ &= 3u_n + 3 \\ &= 3(u_n + 1) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 2$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2 \times 3^n$.
On en déduit que pour tout n entier, $\boxed{u_n = 2 \times 3^n - 1}$.

(b) On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(2 \times 3^k - 1) = 2\sum_{k=0}^{n} 3^k - \sum_{k=0}^{n} 1 \quad \text{par linéarité de la somme}$$
$$= 2 \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3} - (n+1) = 2 \times \frac{1-3^{n+1}}{-2} - n - 1 = 3^{n+1} - n - 2$$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = 3^{n+1} - n - 2}$.

2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est donnée par

$$x^2 = x - \frac{1}{4} \iff x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

Le discriminant associé à cette équation est

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 1 = 0$$

L'unique solution réelle est $x_0 = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, il existe α et β deux réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (\alpha + \beta n)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En utilisant $v_0 = 1$ et $v_0 = \alpha$ puis $v_1 = 3$ et $v_1 = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, on en déduit le système

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ 1+\beta = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (1+5n)\left(\frac{1}{2}\right)^n.}$

3. (a) D'après l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} + b_{n+1} &\iff a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n + 3b_n \\ &\iff a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n + 3(a_{n+1} - 2a_n) \\ &\iff a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n \end{aligned}$$

Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien $\boxed{\text{une suite récurrente linéaire d'ordre 2}}$.

(b) Pour déterminer son expression en fonction de n, on commence par poser l'équation caractéristique associée :

$$x^2 = 5x - 4 \iff x^2 - 5x + 4 = 0$$

Le discriminant associé à cette équation est

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 9$$

L'équation caractéristique a deux solutions qui sont :

$$x_1 = \frac{5-3}{2} \qquad x_2 = \frac{5+3}{2}$$
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 4$$

Dans ce cas, il existe α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha \times 1^n + \beta \times 4^n$$

En utilisant $a_0 = 0$ et $a_1 = 2a_0 + b_0 = 1$, on en déduit le système d'équation

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 4\beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\beta \\ 3\beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{a_n = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4^n}{3} \text{ et } b_n = a_{n+1} - 2a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times 4^n}$.

Exercice 5

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \text{ et } g(x) = -\frac{x+1}{x-2}$$

1. La quantité $\dfrac{1}{x+1}$ est définie si : $x+1 \neq 0$ i.e. si $x \neq -1$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.}$

   La quantité $\dfrac{1}{x-2}$ est définie si : $x-2 \neq 0$ i.e. si $x \neq 2$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[}$.

2. On note $a = \dfrac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}$

   (a) On simplifie l'expression de a, pour cela on multiplie par la quantité conjuguée :

   $$\begin{aligned} a &= \frac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}} = \frac{(-2\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} \\ &= \frac{-2\sqrt{2}-4-1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{-5-3\sqrt{2}}{-1} = 5+3\sqrt{2} \end{aligned}$$

   Soit $\boxed{a = 5+3\sqrt{2}}$.

   (b) Commençons par calculer :

   $$a+1 = 6+3\sqrt{2} = 3(2+\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad a-2 = 3+3\sqrt{2} = 3(1+\sqrt{2}).$$

   On en déduit que :

   $$g(a) = -\frac{a+1}{a-2} = -\frac{3(2+\sqrt{2})}{3(1+\sqrt{2})} = -\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

   Simplifions au maximum ce résultat en multipliant par la quantité conjuguée :

   $$g(a) = -\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -\frac{(2+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{1-2} = 2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-2 = -\sqrt{2}.$$

   Ainsi $\boxed{g(a) = -\sqrt{2}}$.

   (c) On calcule

   $$f(g(a)) = \frac{2g(a)-1}{g(a)+1} = \frac{-2\sqrt{2}-1}{-\sqrt{2}+1}.$$

   On reconnaît l'expression de a donnée dans l'énoncé alors $\boxed{f(g(a)) = a}$.

   (d) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$. On a :

   $$f(g(x)) = \frac{2g(x)-1}{g(x)+1}.$$

   On calcule alors :

   $$\begin{aligned} 2g(x)-1 &= -2\frac{x+1}{x-2} - 1 \\ &= \frac{-2x-2-(x-2)}{x-2} \\ &= \frac{-2x-2-x+2}{x-2} \\ &= \frac{-3x}{x-2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g(x)+1 &= -\frac{x+1}{x-2}+1 \\ &= \frac{-x-1+(x-2)}{x-2} \\ &= \frac{-x-1+x-2}{x-2} \\ &= \frac{-3}{x-2} \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\dfrac{1}{g(x)+1} = \dfrac{x-2}{-3}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{2g(x)-1}{g(x)+1} \\ &= (2g(x)-1)\frac{1}{g(x)+1} \\ &= \frac{-3x}{x-2}\frac{x-2}{-3} \\ &= x \end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $\boxed{f(g(x)) = x}$.

3. **Un peu de Python**

(a) Cette instruction permet d'importer la bibliothèque numpy dans laquelle est enregistrée certaines fonctions comme la racine carré (`np.sqrt`), l'exponentielle (`np.exp`)...

(b) On peut écrire par exemple :

```
a=(-2*np.sqrt(2)-1)/(1-np.sqrt(2))
```

(c) On peut écrire par exemple :

```
def f(x):
    y=(2*x-1)/(x+1)
    return y
```

(d) On peut écrire par exemple :

```
def g(x):
    y=-(x+1)/(x-2)
    return y
```

(e) On peut écrire par exemple :

```
b=g(a)
```

(f) On peut écrire par exemple :

```
f(b)
```

Problème 1 *Etude d'une suite homographique*

1. (a) Notons pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant 0$ ».

Initialisation $(n=0)$ On a $u_0 = 2 \geqslant 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence $u_n \geqslant 0$ donc $u_n + 4 > 0$ et $3 + 2u_n \geqslant 0$ ainsi par quotient

$$u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{u_n+4} \geqslant 0.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -4$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + 4 \neq 0$, l'expression de u_{n+1} est donc bien définie et on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{bien définie}}$.

2. Calculons les premiers termes de la suite, on a :
   - $u_1 = \dfrac{3 + 2 \times u_0}{u_0 + 4} = \dfrac{7}{6}$
   - $u_2 = \dfrac{3 + 2 \times \frac{7}{6}}{\frac{7}{6} + 4} = \dfrac{3 + \frac{7}{3}}{\frac{31}{6}} = \dfrac{16}{3} \times \dfrac{6}{31} = \dfrac{32}{31}$

   On a donc :
$$\boxed{u_0 = 2, \quad u_1 = \frac{7}{6}, \quad u_2 = \frac{32}{31}}.$$

   Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique :
$$u_1 - u_0 = \frac{7}{6} - 2 = -\frac{5}{6} \quad \text{et} \quad u_2 - u_1 = \frac{32}{31} - \frac{7}{6} = \frac{32 \times 6 - 7 \times 31}{6 \times 31} = \frac{192 - 217}{186} = -\frac{25}{186} \neq -\frac{5}{6}.$$

   Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{n'est pas arithmétique}}$.
   Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique :
$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{7}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12} \quad \text{et} \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{32}{31} \times \frac{6}{7} = \frac{192}{217} \neq \frac{7}{12}.$$

   Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{n'est pas géométrique}}$.

3. (a) D'après la question 1.(a), pour tout entier n, $u_n \geqslant 0$ donc $u_n \neq -3$ soit $u_n + 3 \neq 0$. Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned}
v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} &= \frac{\frac{3+2u_n}{u_n+4} - 1}{\frac{3+2u_n}{u_n+4} + 3} = \frac{\frac{3+2u_n-(u_n+4)}{u_n+4}}{\frac{3+2u_n+3(u_n+4)}{u_n+4}} \\
&= \frac{3 + 2u_n - (u_n + 4)}{u_n + 4} \times \frac{u_n + 4}{3 + 2u_n + 3(u_n + 4)} \\
&= \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{1}{5} v_n.
\end{aligned}$$

   Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{géométrique de raison } \frac{1}{5} \text{ et de premier terme } v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = \frac{1}{5}}$.

   (c) On peut donc en déduire son expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\boxed{v_n = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 \neq 0$ donc $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1} \neq 1$. Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 1}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $v_n - 1 \neq 0$, on peut écrire :
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \iff (u_n + 3)v_n = u_n - 1 \iff u_n v_n + 3v_n = u_n - 1 \iff (v_n - 1)u_n = -1 - 3v_n \iff u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n}.$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{1 - v_n}}$.

5. D'après le résultat de la question 3.(b), on peut donc écrire :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1 + 3\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}}.$$

Problème 2

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation

$$a^b = b^a$$

où a et b sont des entiers strictement positifs tels que $a < b$

1. Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\begin{aligned} & a^b = b^a \\ \Longleftrightarrow & \mathrm{e}^{b\ln(a)} = \mathrm{e}^{a\ln(b)} \\ \Longleftrightarrow & \quad b\ln(a) = a\ln(b) \quad \text{(par application de } \ln) \\ \Longleftrightarrow & \frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b} \\ \Longleftrightarrow & f(a) = f(b) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } a^b = b^a \Leftrightarrow f(a) = f(b)}$$

2. (a) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle le produit des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ dérivables sur $]0, +\infty[$. Calculons sa dérivée,

$$\forall x \in]0, +\infty[\,, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

comme $x^2 > 0$ sur $]0, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$. On a alors :

$$1 - \ln(x) > 0 \iff 1 > \ln(x) \iff \mathrm{e}^1 > x.$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Variations de f	||	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

(b) L'étude des variations de f réalisée à la question précédente nous permet de montrer que la fonction f atteint $\boxed{\text{son maximum } \frac{1}{\mathrm{e}} \text{ en } x = \mathrm{e}}$.

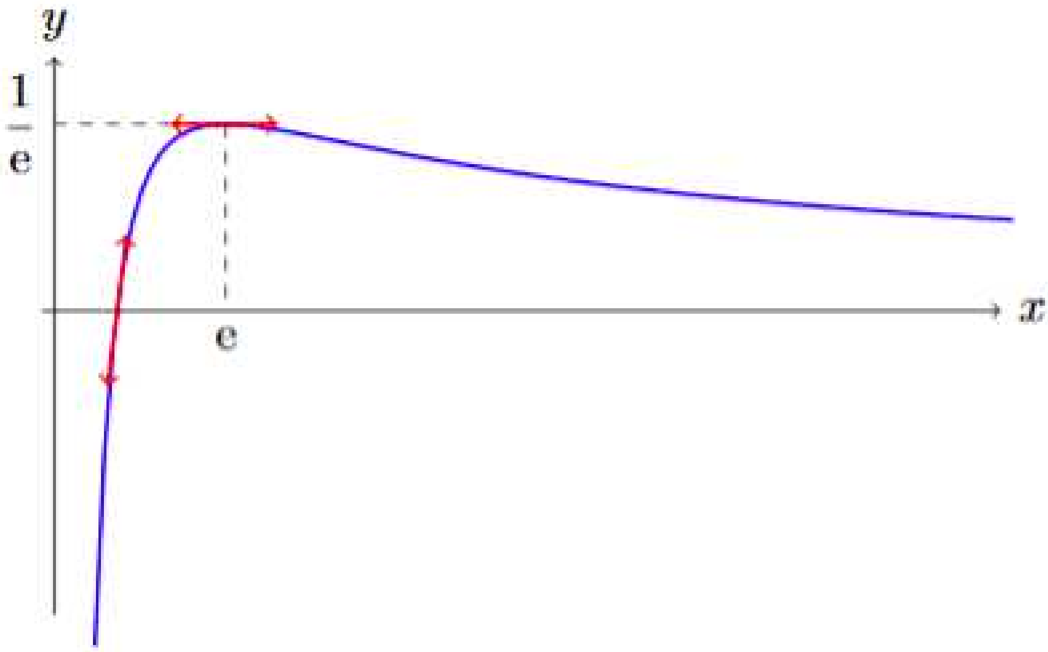
(c) Au point d'abscisse 1, la fonction f admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1.$$

(d) On en déduit la représentation graphique suivante.

3. On souhaite trouver les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(a) = f(b)$ et $a \leqslant b$. On cherche donc tous les couples d'entiers différents possédant la même image par f. Or d'après l'étude précédente :
   - si $y > \frac{1}{\mathrm{e}}, y$ n'admet pas d'antécédent par f
   - si $y = \frac{1}{\mathrm{e}}, y$ admet un unique antécédent par f(il s'agit de e)
   - si $0 < y < \frac{1}{\mathrm{e}}, y$ admet deux antécédents par f. Le plus petit est situé dans l'intervalle $]0, \mathrm{e}[$ et plus précisément dans l'intervalle $]1, \mathrm{e}[$ car $f(1) = 0$. Le plus grand est situé dans l'intervalle $]\mathrm{e}, +\infty[$
   - si $y \leqslant 0, y$ admet un unique antécédent par f

   On en déduit que a peut prendre toute valeur entière de l'intervalle $]1, e[$.
   Comme $\mathrm{e} \simeq 2,71$, la seule valeur possible est $\boxed{a = 2}$.



4. Ici, on a fixé $a = 2$ et on cherche les solutions entières $b \neq 2$ à l'équation : $f(2) = f(b)$ D'après l'étude précédente, si b existe, il est unique et situé dans l'intervalle $]e, +\infty[$
   - Si $b = 3$, on a : $2^b = 2^3 = 8 \neq 9 = 3^2 = b^2$
   - Si $b = 4$, on a : $2^b = 2^4 = 16 = 16 = 4^2 = b^2$

$$\boxed{\text{L'équation } 2^b = b^2 \text{ admet comme unique solution } b = 4}$$

5. D'après ce qui précède,

$$\boxed{\text{l'équation } a^b = b^a \text{ admet comme unique couple entier solution (avec } a < b\text{) le couple } (2, 4).}$$