Corrigé du DS n° 1

Exercice 1

1. • $A = 4\sqrt{4 \times 6} - 5\sqrt{16 \times 6} + 4\sqrt{9 \times 6} = 8\sqrt{6} - 20\sqrt{6} + 12\sqrt{6} = 9.$ Ainsi, $\boxed{A = 0}$
   • $B = \dfrac{x^{15} \times x^2}{x^{-3}} = \dfrac{x^{17}}{x^{-3}} = x^{20}.$ Ainsi, $\boxed{B = x^{20}}$
   • $C = \dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} + \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \dfrac{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \dfrac{8}{1-3} = -4.$ Ainsi, $\boxed{C = -4}$
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, multiplions par la quantité conjuguée, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \times \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1})^2-(\sqrt{k})^2} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}.$$

Exercice 2

1. On a :

$$\begin{aligned} 4(x-2)-3(6-2(3-4x))+3(7-2x) &= 4x-8-3(6-6+8x)+21-6x \\ &= 4x-8-24x+21-6x \\ &= -26x+13 \end{aligned}$$

Et donc, $4(x-2)-3(6-2(3-4x))+3(7-2x) = 0 \iff -26x+13 = 0 \iff -26x = -13 \iff x = \dfrac{-13}{-26} = \dfrac{1}{2}.$

Donc, $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}.}$

2. Commençons par déterminer le domaine de définition de l'inéquation. Cette inéquation est bien définie pour $x \neq -2$ donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Résolvons-la :

$$(E) \iff \frac{x-3}{x+2} + 4x - \frac{5x}{x+2} \iff \frac{x-3+4x(x+2)-5x}{x+2} < 0 \iff \frac{4x^2+4x-3}{x+2} < 0.$$

Il nous faut donc étudier le signe de $4x^2+4x-3$ et le signe de $x+2$. Etudions le signe de ces deux polynômes. Pour $x+2$, on a :

$$x+2 > 0 \iff x > -2.$$

Pour $4x^2+4x-3$, on a $\Delta = 64$, $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

On a alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $4x^2+4x-3$			$+$		0	$-$	0	$+$	
Signe de $x+2$		$-$	0			$+$			
Signe de $\frac{4x^2+4x-3}{x+2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit la solution $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty; -2[\cup \left]-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right[}$.

3. Commençons par déterminer le domaine de définition de l'équation. Pour que les racines soient bien définies, il faut que :

$$x - 1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x + 4 \geqslant 0.$$

Ainsi l'équation est bien définie pour $x \in [1; +\infty[$.
Soit $x \in [1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} &= \sqrt{5} \\
\sqrt{x-1} &= \sqrt{5} - \sqrt{x+4} \\
x - 1 &= (\sqrt{5} - \sqrt{x+4})^2 \\
x - 1 &= 5 - 2\sqrt{5}\sqrt{x+4} + (x+4) \\
-10 &= 2\sqrt{5}\sqrt{x+4} \\
\frac{-5}{\sqrt{5}} &= \sqrt{x+4} \\
\frac{25}{5} &= x + 4 \\
x &= 5 - 4 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathscr{S} = \{1\}}$.

4. Commençons par déterminer le domaine de définition de l'inéquation. Pour que les racines soient bien définies, il faut que :

$$x^2 + 9 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x \geqslant 0$$

soit $x \geqslant 0$ car $x^2 + 9 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi l'inéquation est définie sur $[0; +\infty[$.
Soit $x \in [0; +\infty[$, on a :

$$\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x} > 0 \iff \sqrt{x^2+9} > \sqrt{x} \iff x^2 + 9 > x \iff x^2 - x + 9 > 0.$$

Calculons le discriminant de ce trinôme. On a $\Delta = -35 < 0$. Ainsi $x^2 - x + 9 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{\mathscr{S} = [0; +\infty[}$.

Exercice 3

1.

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Exprimons u_n en fonction de n :

- On reconnaît une suite arithmético-géométrique.
- $\alpha = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3} \iff \alpha = -1$.
- Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n + 1$. Montrons que la suite (w_n) est géométrique :

$$w_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(u_n + 1) = \frac{2}{3}w_n$$

  donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = u_0 + 1 = 3 + 1 = 4$.
  On sait alors que $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = w_0 \times q^n$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- Or, $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n + 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = w_n - 1$.

  Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$.

2.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$$

Exprimons u_n en fonction de n :

- On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- Son équation caractéristique associée (E) est $r^2 = 3r + 4 \iff r^2 - 3r - 4 = 0$.
  On trouve $\Delta = 25 = 5^2 > 0$ donc (E) admet deux solutions réelles distinctes

$$r_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \text{ et } r_2 = \frac{3+5}{2} = 4.$$

On sait alors qu'il existe λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda(r_1)^n + \mu(r_2)^n$ *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda(-1)^n + \mu \times 4^n$.
En particulier, pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 = \lambda + \mu$ et pour $n = 1$, on a $u_1 = 2 = -\lambda + 4\mu$ donc λ et μ vérifient le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 & L_1 \\ -\lambda + 4\mu = 2 & L_2 \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ donne $5\mu = 3$ donc $\mu = \frac{3}{5}$ puis L_1 donne $\lambda = 1 - \mu = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2}{5}(-1)^n + \frac{3}{5} \times 4^n.}$

Exercice 4 *Un peu de logique*

1. On voit que
$$(A) \iff (E) \iff (F) \iff (G)$$
et
$$(B) \iff (C) \iff (D)$$
2. On a :
   - non (A) : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq a$
   - non (B) : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in \mathbb{R}_+, f(x) \neq a$
   - non (C) : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq f(y)$.
3. On a
   - (A) : $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4)$.
   - (B) : $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a$ ou $f(x) = b$
4. Soient les deux propositions suivantes :
   - (A) : La fonction f est constante.
   - (B) : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = f(x)$.

   (a) Supposons que la fonction f est constante. Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x+2) = f(x)$. Ainsi $\boxed{(A) \Longrightarrow (B)}$.

   (b) Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(\pi x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, (comme la fonction sin est 2π-périodique)

$$f(x+2) = \sin(\pi(x+2)) = \sin(\pi x + 2\pi) = \sin(\pi x) = f(x)$$

Ainsi f vérifie bien la proposition (B). La fonction f en revanche n'est pas constante. En effet $f(0) = \sin(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. On peut donc en conclure que la réciproque $(B) \Longrightarrow (A)$ n'est pas vraie en général car on vient d'exhiber un contre-exemple.

Exercice 5 *Une équation fonctionnelle*

1. (a) D'après ($\star\star$) utilisée avec $x = y = 0$, on obtient
$$f(0)f(0) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(0)^2 = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(0) = 0.$$
(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.D'après ($\star\star$) utilisée avec $y = x$, on a
$$f(x)^2 = \sqrt{x}f(2x) + \sqrt{x}f(2x) = 2\sqrt{x}f(2x)$$
Et ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
(c) Soient x et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors d'après la question précédente
$$f(x)^2 = 2\sqrt{x}f(2x) \quad \text{et} \quad f(y)^2 = 2\sqrt{y}f(2y)$$
ce qui nous donne, comme $\sqrt{x} \neq 0$ et $\sqrt{y} \neq 0$,
$$f(2x) = \frac{f(x)^2}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad f(2y) = \frac{f(y)^2}{2\sqrt{y}}$$
En réinjectant dans ($\star\star$), on obtient
$$f(x)f(y) = \sqrt{y} \cdot \frac{f(x)^2}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \frac{f(y)^2}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(yf(x)^2 + xf(y)^2\right)$$
(d) Soit $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Alors
$$\begin{aligned}(\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y))^2 &= yf(x)^2 + xf(y)^2 - 2\sqrt{xy}f(x)f(y) \\ &= 2\sqrt{xy}\left(\frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(yf(x)^2 + xf(y)^2\right) - f(x)f(y)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$
d'après la question précédente.
(e) Soit $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. D'après la question 1.(d),
$$\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sqrt{y}f(x) = \sqrt{x}f(y)$$
Comme x et y sont strictement postifs, on peut diviser par $\sqrt{xy}$ cette dernière égalité, et l'on obtient
$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{f(y)}{\sqrt{y}}$$
Ceci étant vrai pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, on en déduit que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
(f) *Cette dernière question est plus difficile car c'est à vous de prendre quelques initiatives.*
Première étape : Comme la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors il existe un réel α tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \alpha$. Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \alpha\sqrt{x}$$
Comme $f(0) = 0 = \alpha \cdot \sqrt{0}$, alors on peut finalement écrire que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \alpha\sqrt{x}$$
Deuxième étape : Nous allons ensuite réinjecter ce résultat dans l'égalité ($\star\star$). On obtient, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$
$$\alpha\sqrt{x} \cdot \alpha\sqrt{y} = \sqrt{y} \cdot \alpha\sqrt{2x} + \sqrt{x} \cdot \alpha\sqrt{2y}$$
i.e.
$$\alpha^2\sqrt{xy} = 2\alpha\sqrt{2xy}$$
Comme ceci est vrai pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, alors en particulier pour $x = y = 1$, cela donne
$$\alpha^2 = 2\alpha\sqrt{2} \quad \text{i.e.} \quad \alpha(\alpha - 2\sqrt{2}) = 0$$
Ainsi $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2\sqrt{2}$. Finalement f est donc bien la fonction nulle ou la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$.

2. La fonction nulle est bien sûr solution du problème. Posons $f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$. Alors, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,
$$\sqrt{y}f(2x) + \sqrt{x}f(2y) = \sqrt{y} \cdot 2\sqrt{4x} + \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{4y} = 4\sqrt{4xy} = 8\sqrt{xy} = 2\sqrt{2x} \cdot 2\sqrt{2y}$$
Donc f est bien solution du problème.
$\boxed{\text{Bilan}}$: ce problème admet donc exactement deux solutions, la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$ et la fonction nulle.

 © M. Fontaine

Problème 1 *Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3*

1. (a) $v_0 = u_1 + 2u_0 = -5 + 2 \times 4 = 3$ et $v_1 = u_2 + 2u_1 = 13 + 2 \times (-5) = 3$.
Bilan : $\boxed{v_0 = 3 \text{ et } v_1 = 3}$

(b) $v_{n+2} = u_{n+3} + 2u_{n+2}$. Or, $u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$ donc $v_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2} = 2u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_{n+1} - 2u_n = 2(u_{n+2} + 2u_{n+1}) - (u_{n+1} + 2u_n) = 2v_{n+1} - v_n$.
Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n}$

(c) La suite (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique associée (E) est $r^2 = 2r - 1 \iff r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0$. Donc (E) admet une unique solution $r_0 = 1$. On sait alors qu'il existe λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = (\lambda + \mu n)(r_0)^n$ *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \lambda + \mu n$. En particulier, pour $n = 0$, on a $v_0 = 3 = \lambda$ et pour $n = 1$, on a $v_1 = 3 = \lambda + \mu$ donc $\lambda = 3$ et $\mu = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 3$.
Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 3}$

(d) On a montré à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite constante.

(e) Or, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $v_n = u_{n+1} + 2u_n$ et $v_n = 3$ donc $3 = u_{n+1} + 2u_n$ donc $u_{n+1} = -2u_n + 3$.
Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -2u_n + 3.}$

(f) La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique. On cherche α tel que $\alpha = -2\alpha + 3$ et on trouve $\alpha = 1$. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n - 1$. Montrons que la suite (w_n) est géométrique : $w_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -2u_n + 3 - 1 = -2u_n + 2 = -2(u_n - 1) = -2w_n$. Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 1 = 4 - 1 = 3$ donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $w_n = 3(-2)^n$. Or, $w_n = u_n - 1$ donc $u_n = w_n + 1$ et donc $u_n = 3(-2)^n + 1$.
Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3(-2)^n + 1}$

(g)
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(3(-2)^k + 1\right) = 3\sum_{k=0}^{n}(-2)^k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 3\frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)} + (n+1) = 1 - (-2)^{n+1} + n + 1$$
Bilan : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = n + 2 - (-2)^{n+1}.}$

2. (a) **Montrons par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0$:**
Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : «$t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0.$»

Initialisation $(n = 0)$
On a $t_0 = u_0 - (-2)^0 = 1$, $t_1 = u_1 - (-2)^1 = 0$ et $t_2 = u_2 - (-2)^2 = -1$. Ainsi $t_2 - 2t_1 + t_0 = -1 + 2 \times 0 + 1 = 0$.
Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On doit donc montrer que $t_{n+3} - 2t_{n+2} + t_{n+1} = 0$.

$$\begin{aligned}
t_{n+3} - 2t_{n+2} + t_{n+1} &= t_{n+3} - 2(2t_{n+1} - t_n) + t_{n+1}, \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= t_{n+3} - 3t_{n+1} + 2t_n \\
&= u_{n+3} - (-2)^{n+3} - 3(u_{n+1} - (-2)^{n+1}) + 2(u_n - (-2)^n) \\
&= u_{n+3} + 8(-2)^n - 3u_{n+1} - 6(-2)^n + 2u_n - 2(-2)^n \\
&= u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n \\
&= 0, \qquad \text{par définition de la suite } (u_n).
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion D'après la principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n, à savoir :
$$t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0.$$

(b) La suite $(t_n)_n$ étant une suite récurrence linéaire d'ordre 2, on calcule les racines de son équation caractéristique.
$$(E) : \qquad r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0.$$
(E) possède donc une racine double $r_0 = 1$. Le terme général de la suite a donc pour expression :
$$t_n = (\lambda + n\mu)1^n = \lambda + n\mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Déterminons les réels λ et μ, on a $t_0 = 1 = \lambda$ et $t_1 = 0 = \lambda + \mu$. Ainsi $\mu = -\lambda = -1$.
On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 1 - n.}$

(c) On sait que $u_n = t_n + (-2)^n$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - n + (-2)^n.}$

(d) Calculons la somme, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}(1 - k + (-2)^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(-2)^k, \qquad \text{par linéarité de la somme} \\ &= n + 1 - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)} \\ &= \frac{-n^2+n+2}{2} + \frac{1-(-2)^{n+1}}{6} \\ &= \frac{-3n^2+3n+8+(-2)^{n+2}}{6}\end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{-3n^2+3n+8+(-2)^{n+2}}{6}.}$

Problème 2

1. Montrons par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$:
   Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : «u_n existe et $u_n \geqslant 1$.»
   - Initialisation ($n = 0$) :
     $u_0 = 4$ donc u_0 existe et comme $4 \geqslant 1$, on a bien $u_0 \geqslant 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité :
     Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 1$ donc $u_n + 1 \geqslant 2$ donc $u_n + 1 \neq 0$ donc $u_{n+1} = \frac{4u_n-2}{u_n+1}$ existe bien.
     D'autre part,
     $$u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 2 - u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{3u_n - 3}{u_n + 1} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 1}.$$
     Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 1$ donc $u_n - 1 \geqslant 0$. Or $3 \geqslant 0$ et $u_n + 1 \geqslant 2 > 0$ donc $\frac{3(u_n-1)}{u_n+1} \geqslant 0$ donc $u_{n+1} - 1 \geqslant 0$ *i.e.* $u_{n+1} \geqslant 1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :
     $$\boxed{\text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 1}$$
2. Montrons que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique :
   $u_0 = 4$ donc $u_1 = \dfrac{4u_0 - 2}{u_0 + 1} = \dfrac{14}{5}$ donc $u_2 = \dfrac{4u_1 - 2}{u_1 + 1} = \dfrac{4 \times \frac{14}{5} - 2}{\frac{14}{5} + 1} = \dfrac{46}{19}$.
   - $u_1 - u_0 = \dfrac{14}{5} - 4 = -\dfrac{6}{5}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{46}{19} - \dfrac{14}{5} = -\dfrac{36}{95}$ donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_2$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
   - $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{\frac{14}{5}}{4} = \dfrac{7}{10}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\frac{46}{19}}{\frac{14}{5}} = \dfrac{115}{133}$ donc $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

   Bilan : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est ni arithmétique, ni géométrique}}$
3. Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $u_n \neq 2$ ».
   Initialisation ($n = 0$) :
   $u_0 = 4$ et $4 \neq 2$, donc $u_0 \neq 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Raisonnons par l'absurde et supposons que $u_{n+1} = 2$. Alors $\frac{4u_n-2}{u_n+1} = 2$ donc $4u_n - 2 = 2u_n + 2$ donc $2u_n = 4$ donc $u_n = 2$. Or, par hypothèse de récurrence, on a $u_n \neq 2$: absurde ! Donc $u_{n+1} \neq 2$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.
   Conclusion d'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 2}$$

4. (a) Justifions brièvement que la suite (w_n) est bien définie :
En effet, on vient de montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 2$, donc $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est bien définie}}$

(b) Montrons que la suite (w_n) est géométrique :

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-2} = \frac{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-1}{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-2} = \frac{4u_n-2-u_n-1}{4u_n-2-2u_n-2} = \frac{3u_n-3}{2u_n-4} = \frac{3(u_n-1)}{2(u_n-2)} = \frac{3}{2}w_n$$

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{3}{2} \text{ et de premier terme } w_0 = \frac{u_0-1}{u_0-2} = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}}$

(c) Exprimons w_n en fonction de n :
Par conséquent, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $w_n = w_0 \times q^n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$.
Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}$

5. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n \neq 1$:
Soit n dans $\mathbb{N}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $w_n = 1$. Alors $\frac{u_n-1}{u_n-2} = 1$ donc $u_n - 1 = u_n - 2$ et donc $-1 = -2$: absurde ! Donc $w_n \neq 1$.
Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n \neq 1}$

Exprimons u_n en fonction de w_n :
On sait que $w_n = \frac{u_n-1}{u_n-2}$ donc $w_n(u_n-2) = u_n - 1$ donc $w_n u_n - 2w_n = u_n - 1$ donc $w_n u_n - u_n = 2w_n - 1$ donc $(w_n-1)u_n = 2w_n - 1$. Or, d'après la question précédente, on sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n \neq 1$ donc $w_n - 1 \neq 0$ donc on peut écrire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{2w_n-1}{w_n-1}}$$

6. Expression de u_n en fonction de n :
D'après **4)**, on sait que $w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ et d'après **5)**, on sait que $u_n = \frac{2w_n-1}{w_n-1}$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}}$$