Devoir surveillé n° 1

Durée : 3h

Les documents et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet de quatre pages est composé de cinq exercices et de deux problèmes. Bon courage !

Exercice 1

1. Simplifier au maximum les nombres suivants :
   - $A = \sqrt{48} - \sqrt{27} - \dfrac{3}{\sqrt{3}}$
   - $B = \dfrac{(x^2)^6 \times x^{-4}}{x^3 \times x^{-1}}$
   - $C = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \sqrt{\dfrac{98}{25}}$
2. Montrer que pour tout entier n,
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
3. Montrer que pour tout entier n, et pour tout réel $x \neq 1$,
$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
$$\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x} < \frac{1}{x+7}.$$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$$\sqrt{2-x} = \frac{x}{2}.$$

Exercice 3 *Logique et raisonnements*

1. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad (-1)^k a = b \iff a = (-1)^k b.$$
2. On considère les 4 assertions suivantes :
   (A) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
   (B) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
   (C) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
   (D) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$
   (a) Chacune de ces assertions est-elle vraie ou fausse ? Si elle est vraie, la démontrer et sinon donner un contre-exemple.
   (b) Ecrire la négation des 4 assertions précédentes.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leqslant b$ alors $a \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ et $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est un entier pair.

Exercice 4

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$$
   (a) Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
2. Déterminer une expression de v_n en fonction de n, pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 1, \quad v_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = v_{n+1} - \dfrac{1}{4} v_n \end{cases}$$
3. Soient les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\begin{cases} a_0 = 0, \quad b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$$
   (a) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   (b) Déterminer une expression de a_n puis b_n en fonction de n.

Exercice 5

On considère les fonctions f et g définies par :
$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \text{ et } g(x) = -\frac{x+1}{x-2}$$

1. Donner les domaines de définitions de f et de g.
2. On note $a = \dfrac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}$
   (a) Simplifier l'expression de a. (Pour qu'il n'y ait pas de racines au dénominateur).
   (b) Déterminer $g(a)$
   (c) Que vaut $f(g(a))$? On donnera le résultat en fonction de a
   (d) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Que vaut $f(g(x))$? On simplifiera l'expression au maximum.

3. **Un peu de Python**
   (a) Expliquer le sens de l'instruction suivante

   `import numpy as np`

   (b) Écrire l'instruction permettant d'entrer la valeur de a que l'on placera dans une variable a.
   (c) Recopier et compléter la fonction suivante permettant de définir la fonction f.

```
def f(......):
    ............
    return ......
```

   (d) Ecrire une fonction permettant de définir la fonction g.
   (e) Écrire la ligne de code permettant de calculer $g(a)$ et de l'enregistrer dans une variable b. (en utilisant la fonction g).
   (f) Écrire la ligne de code permettant de calculer $f(g(a))$.

Problème 1 *Etude d'une suite homographique*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{u_n+4}.$$

Le but de l'exercice est d'exprimer u_n en fonction de n.

1. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$
   (a) Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n \neq 1.$$
   puis exprimer u_n en fonction de v_n.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Problème 2

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation
$$a^b = b^a$$
où a et b sont des **entiers** strictement positifs tels que $a < b$.

On rappelle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.

1. Montrer que l'équation $a^b = b^a$ est équivalente à $f(a) = f(b)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
2. (a) Dresser le tableau de variations de f (on admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$).
   (b) Montrer que f admet un maximum global en un point que l'on précisera.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 1$.
   (d) Tracer la courbe de f, la tangente horizontale et la tangente en $x = 1$.
3. En déduire les valeurs possibles de a ?
4. Résoudre l'équation $2^b = b^2$.
5. Conclure en donnant l'ensemble de tous les couples (a, b) où a et b sont des entiers strictement positifs vérifiant $a^b = b^a$ avec $a < b$.

