Devoir surveillé n° 1

Durée : 3h

Les documents et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet de trois pages est composé de cinq exercices et de deux problèmes. Bon courage !

Exercice 1

1. Simplifier au maximum les nombres suivants :
   - $A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$
   - $B = \dfrac{(x^3)^5 \times x^2}{x^2 \times x^{-5}}$
   - $C = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$$4(x-2) - 3\left(6 - 2(3-4x)\right) + 3(7-2x) = 0.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
$$\frac{x-3}{x+2} + 4x < \frac{5x}{x+2}.$$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5}.$$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
$$\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x} > 0.$$

Exercice 3

1. Déterminer une expression de u_n en fonction de n, pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3} \end{cases}$$

2. Déterminer une expression de u_n en fonction de n, pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$$

Exercice 4 *Un peu de logique*

1. Séparer les propositions suivantes en deux groupes de propositions équivalentes entre elles :
   Par exemple, $(A) \iff (B) \iff (C) \iff (D)$ *et* $(E) \iff (F) \iff (G)$. *Aucune justification n'est attendue.*
   - (A) : $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a$.
   - (B) : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}_+$tel que $f(x) = a$
   - (C) : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}_+$
   - (D) : la fonction f est à valeurs positives
   - (E) : la fonction f est constante.
   - (F) : $\forall x, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$.
   - (G) : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(3)$.
2. Ecrire les négations des propositions suivantes :
   - (A) : $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a$.
   - (B) : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}_+$tel que $f(x) = a$
   - (C) : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$
3. Ecrire avec des quantificateurs et des connecteurs logiques les propositions suivantes :
   - (A) : La fonction f est la fonction constante égale à 1 ou la fonction constante égale à 4 .
   - (B) : La fonction f prend au plus deux valeurs.
4. Soient les deux propositions suivantes :
   - (A) : La fonction f est constante.
   - (B) : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = f(x)$.

   (a) Montrer que $(A) \Longrightarrow (B)$.

   (b) Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(\pi x)$.
   Montrer que f vérifie la proposition (B). La fonction f vérifie-t-elle la proposition (A)? Que peut-on en conclure ?

Exercice 5 *Une équation fonctionnelle*

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad f(x)f(y) = \sqrt{y}f(2x) + \sqrt{x}f(2y). \quad (\star\star)$$

1. Dans toute cette question, on considère f une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$vérifiant la relation $(\star\star)$.

   (a) Vérifier que $f(0) = 0$.

   (b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f(x)^2 = 2\sqrt{x}f(2x)$.

   (c) En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f(x)f(y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left[y(f(x))^2 + x(f(y))^2\right]$$

   (d) Vérifier alors que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$,
$$(\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y))^2 = 0$$

   (e) En déduire que la fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ est constante.

   (f) Montrer alors que f est la fonction nulle ou la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$.
2. Conclure.

Problème 1 *Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3*

1. Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 4 \qquad u_1 = -5 \qquad u_2 = 13 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} + 2u_n$.

(a) Calculer v_0 et v_1.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.

(c) Déterminer l'expression de la suite (v_n).

(d) En déduire que la suite (v_n) est constante.

(e) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -2u_n + 3$.

(f) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3(-2)^n + 1$.

(g) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

2. Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \qquad u_1 = -2 \qquad u_2 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n = u_n - (-2)^n$.

(a) Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0$$

(b) Déterminer alors l'expression de t_n en fonction de n.

(c) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - n + (-2)^n$.

(d) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Problème 2 *Etude d'une suite homographique*

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$$

Le but de l'exercice est d'exprimer u_n en fonction de n.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \geqslant 1$ » est vraie.
2. Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 2$$

4. Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$$

(a) Justifier brièvement que la suite (w_n) est bien définie.

(b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique.

(c) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n \neq 1$$

puis exprimer u_n en fonction de w_n.

6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Fin du sujet. Bon week-end !