Corrigé du DM n° 9

Exercice 1

1. **Etude d'un cas particulier**
2. (a) Commençons par vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_2[x]$. Comme $P \in \mathbb{R}_2[x]$, on a : d'une part $\deg(P) \leqslant 2$ donc $\deg(P') \leqslant 1$, comme $\deg(x+1) = 1$, on en déduit que $\deg((x+1)P') \leqslant 2$.
D'autre part, $\deg(P'') \leqslant 0$ et $\deg(-2x^2) = 2$ donc $\deg(-2x^2P'') \leqslant 2$.
On a donc bien $\boxed{\Phi(P) \in \mathbb{R}_2[x]}$.
Il reste à montrer que Φ est une application linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[x]^2$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P + Q) &= (x+1)(\lambda P + Q)' - 2x^2(\lambda P + Q)'' \\ &= (x+1)(\lambda P' + Q') - 2x^2(\lambda P'' + Q'') \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= (x+1)\lambda P' + (x+1)Q' - 2x^2\lambda P'' - 2x^2Q'' \\ &= \lambda((x+1)P' - 2x^2P'') + (x+1)Q' - 2x^2Q'' \\ &= \lambda\Phi(P) + \Phi(Q).\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])}$.

(b) Soit $\left(1, x, x^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, on a alors :

$$\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Vect}\left(\Phi\left(1\right), \Phi\left(x\right), \Phi\left(x^2\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(0, x+1, 2x - 2x^2\right) = \mathrm{Vect}\left(x+1, x - x^2\right).$$

La famille de polynômes $\left\{x+1, x-x^2\right\}$ est génératrice de $\mathrm{Im}(\Phi)$. Elle est de plus libre car formée de polynômes non-nuls de degrés distincts donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Elle forme donc une base de $\mathrm{Im}(\Phi)$.
Comme une base de $\mathrm{Im}(\Phi)$ ne contient que deux vecteurs, contrairement à la base canonique de l'espace d'arrivée qui en contient trois, $\mathrm{Im}(\Phi) \subsetneq \mathbb{R}_2[x]$ donc Φ $\boxed{\text{n'est pas surjective}}$.

(c) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, on a $\Phi(P) = 0$. Comme $P \in \mathbb{R}_2[x]$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(P)(x) = (x+1)(2ax + b) + 2x^2(2a) = -2ax^2 + (2a+b)x + b.$$

Comme $\Phi(P) = 0$, on obtient, par identification des coefficients, le système suivant :

$$\begin{cases} -2a = 0 \\ 2a + b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

Ainsi $P(x) = c$ et finalement, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{P : x \mapsto c, c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1) = \mathrm{Vect}\left(1\right)$. La famille (1) est de plus libre (un seul vecteur non nul), donc est une base de $\mathrm{Ker}(\Phi)$.
Comme $\mathrm{Ker}(\Phi) \neq \left\{0_{\mathbb{R}[x]}\right\}$, Φ $\boxed{\text{n'est pas injective}}$.

3. **Cas général**

(a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$, montrons que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$. Comme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on a : $\deg(P) \leqslant n$. Alors

$$\deg\left((x+1)P'\right) = \deg(x+1) + \deg\left(P'\right) = 1 + \deg\left(P'\right) \leqslant 1 + (n-1) = n$$

et de même,

$$\deg\left(-2x^2P''\right) = 2 + \deg\left(P''\right) \leqslant 2 + (n-2) \leqslant n,$$

donc par somme, $\deg(\Phi(P)) \leqslant n$ et $\boxed{\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]}$.
Il reste à montrer que Φ est une application linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soient $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda P + Q) &= (x+1)(\lambda P + Q)' - 2x^2(\lambda P + Q)'' \\
&= (x+1)(\lambda P' + Q') - 2x^2(\lambda P'' + Q'') \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\
&= (x+1)\lambda P' + (x+1)Q' - 2x^2\lambda P'' - 2x^2 Q'' \\
&= \lambda((x+1)P' - 2x^2P'') + (x+1)Q' - 2x^2Q'' \\
&= \lambda\Phi(P) + \Phi(Q).
\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x])}$.

(b) On a déjà calculé $\Phi(1) = 0$, et $\Phi(x) = x + 1$.
Pour $k \geqslant 2$,

$$\Phi\left(x^k\right) = (x+1)\left(kx^{k-1}\right) - 2x^2\left(k(k-1)x^{k-2}\right) = \left(3k - 2k^2\right)x^k + kx^{k-1}.$$

(c) Soit $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, on a alors :

$$\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Vect}\left(\Phi(1), \Phi(x), \dots, \Phi\left(x^k\right), \dots, \Phi(x^n)\right) = \mathrm{Vect}\left(\Phi(x), \dots, \Phi\left(x^k\right), \dots, \Phi(x^n)\right).$$

On a pu "enlever" $\Phi(1)$ car $\Phi(1) = 0$. On a alors :

$\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Vect}\left(x+1, -2x^2+2x, -9x^3+3x^2, -20x^4+4x^3, \dots, (3n-2n^2)x^n + nx^{n-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n\right).$

La famille $(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n)$ est donc génératrice de $\mathrm{Im}(\Phi)$. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i = 0$ soit :

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(-2x^2+2x) + \lambda_3(-9x^3+3x^2) + \ldots + \lambda_n((3n-2n^2)x^n + nx^{n-1} = 0$$

puis en regroupant les termes par degré :

$$\lambda_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_2)x + (-2\lambda_2 + 3\lambda_3)x^2 + (-9\lambda_3 + 4\lambda_4)x^3 + \ldots + ((3n-2n^2)\lambda_n)x^n = 0.$$

Par identification, on obtient :

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \quad -2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \quad -9\lambda_3 + 4\lambda_4, \dots, (3n-2n^2)\lambda_n = 0$$

soit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

La famille $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ est donc libre. En conclusion, elle forme une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Im}(\Phi)}$.

Remarque Les polynômes $(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n)$ sont de degré croissant de 1 en 1, on dit alors que la famille est échelonnée en degrés. Un théorème (hors programme) assure qu'une famille de polynômes non-nuls échelonnée en degrés est libre.

(d) On a vu que $\Phi(1) = 0$, donc $\boxed{1 \in \mathrm{Ker}(\Phi)}$, et il convient car $1 \neq 0_{\mathbb{R}[x]}$. Ainsi $\mathrm{Vect}(1) \subset \mathrm{Ker}(\phi)$.
Remarque Lorsqu'on aura le Chapitre 20, on pourra conclure en une ligne grâce à un argument de dimension que $\mathrm{Vect}(1) = \mathrm{Ker}(\phi)$

Problème 1 *ESCP Europe 2010 voie T*

1. À l'instant 0, le mobile se trouve sur le point d'abscisse 0. Dès lors, à l'instant 1, le mobile se trouve
   - soit sur le point d'abscisse 1, et ce avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$;
   - soit sur le point d'abscisse 0, et ce avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

   Ainsi, la variable X_1 peut prendre les valeurs 1 et 0. Et on a

$$P(X_1 = 0) = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$$

   Autrement dit, la variable aléatoire X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{3}$. On a alors,

$$E(X_1) = p = \frac{1}{3}$$

2. (a) La variable aléatoire X_2 ne peut prendre de valeur plus grande que 2 puisque le mobile se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse 0 et qu'il ne fait des déplacements que d'une unité à la fois. Par ailleurs,
   - X_2 peut valoir 0 si par exemple, le mobile ne s'est pas déplacé ;
   - X_2 peut valoir 1 si le mobile ne s'est pas déplacé à l'instant 1 mais qu'il s'est déplacé à l'instant 2 ;
   - X_2 peut valoir 2 si le mobile s'est déplacé aux instants 1 et 2.

   Ainsi, on a bien
$$X_2(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

   (b) La variable aléatoire X_1 suit une loi de Bernoulli donc $[X_1 = 0]$ et $[X_1 = 1]$ forme bien un système complet d'évènements. On peut donc appliquer la formule des probabilité totales,
$$\begin{aligned}P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1) \times P_{[X_1=1]}(X_2 = 0)\\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\\ &= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \times P_{[X_1=1]}(X_2 = 1)\\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0\\ &= \frac{2}{9}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}P(X_2 = 2) &= P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 2) + P(X_1 = 1) \times P_{[X_1=1]}(X_2 = 2)\\ &= \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

   (c) On a
$$E(X_2) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

3. La variable aléatoire X_n peut prendre toutes les valeurs de 0 à n, la justification étant similaire à celle faite pour la question **2(a)**. Ainsi,
$$X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$$

4. (a) Le mobile ne peut se trouver à l'abscisse k à l'instant n, que si il se trouvait à l'abscisse $k - 1$ à l'instant $n - 1$. En effet, le mobile ne peut se déplacer que d'une unité à la fois, et ne peut rester sur une même abscisse d'un instant à l'autre. Ainsi, on a bien
$$[X_n = k] \subset [X_n - 1 = k - 1]$$

   (b) De manière générale, si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$. Ainsi, d'après la question précédente,
$$[X_n = k] = [X_n = k] \cap [X_{n-1} = k - 1]$$

   (c) D'après la formule des probabilités composées, et l'égalité d'évènements établie à la question précédente, on a :
$$\begin{aligned}P([X_n = k]) &= P([X_n = k] \cap [X_{n-1} = k - 1])\\ &= P_{[X_{n-1}=k-1]}([X_n = k]) \times P([X_{n-1} = k - 1])\\ &= \frac{1}{3} \times P([X_{n-1} = k - 1])\end{aligned}$$

   (d) On a vu que $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$. Ainsi, $\{[X_n = k]\ ;\ k \in [\![0; n]\!]\}$ forme un système complet d'évènement. Donc,
$$P(X_n = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(X_n = k)$$

   Or, on vient de voir à la question précédente que $P(X_n = k) = \dfrac{1}{3}P([X_{n=1} = k - 1])$. Donc,
$$P(X_n = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}P([X_{n=1} = k - 1]) = 1 - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} P([X_{n=1} = k - 1])$$

Or, en faisant le changement d'indice $j = k - 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} P([X_{n-1} = k-1]) = \sum_{j=0}^{n-1} P([X_{n-1} = j])$$

Et $X_{n-1}(\Omega) = [\![0; n-1]\!]$ donc

$$\sum_{j=0}^{n-1} P([X_{n-1} = j]) = 1$$

Bref,

$$P([X_n = 0]) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

5. (a) Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, notons $\mathcal{P}_k$ la propriété « $P[X_n = k]) = \left(\frac{1}{3}\right)^k P([X_{n-k} = 0])$ ».

Initialisation : $(k = 0)$

On a $\left(\frac{1}{3}\right)^0 P([X_{n-0} = 0]) = P([X_n = 0])$. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie et on veut montrer que P_{k+1} est vraie aussi. Alors, en utilisant le résultat de la question **4(c)**, on a :

$$P([X_n = k+1]) = \frac{1}{3} P([X_{n-1} = k])$$

D'où en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} P([X_n = k+1]) &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k P([X_{n-1-k} = 0]) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} P([X_{n-(k+1)} = 0]) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in [\![0; n]\!]$ à savoir

$$P[X_n = k]) = \left(\frac{1}{3}\right)^k P([X_{n-k} = 0])$$

Remarque : En toute rigueur, il aurait fallu considérer la propriété $\mathcal{P}_k$: « pour tout entier $n \geqslant k$, $P[X_n = k]) = \left(\frac{1}{3}\right)^k P([X_{n-k} = 0])$ ».

(b) En choisissant $k = n$ dans l'expression obtenu à la quesrion précédente, on a :

$$P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n P([X_0 = 0]) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(c) On a vu que pour entier $n \geqslant 1$, $P(X_n = 0) = \frac{2}{3}$. En particulier, pour tout $0 \leqslant k < n$, $P([X_{n-k} = 0]) = \frac{2}{3}$. Donc, pour tout $0 \leqslant k < n$,

$$P([X_n = k]) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Et on a vu que

$$P([X_n = n]) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

6. (a) Selon la définition de $E(X_n)$, on a

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} kP([X_n = k]) = \sum_{k=1}^{n} kP([X_n = k])$$

Or, d'après la question **4(c)**,

$$P([X_n = k]) = \frac{1}{3} P([X_{n-1} = k-1])$$

Donc,

$$E(X_n) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} kP([X_{n-1} = k-1])$$

(b) On a donc

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} kP([X_{n-1}=k-1]) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)P([X_{n-1}=j]) \quad \text{en posant } j=k-1 \\
&= \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} jP([X_{n-1}=j])}_{=E(X_{n-1})} + \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} P([X_{n-1}=j])}_{=1} \\
&= \frac{1}{3}E(X_{n-1}) + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(c) Vu la relation établie à la question précédente, on constate que $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = E(X_n) - \dfrac{1}{2}$. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
v_n &= E(X_n) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}E(X_{n-1}) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}\left(v_{n-1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}v_{n-1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}v_{n-1}
\end{aligned}$$

Donc, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Or, $v_0 = E(X_0) - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Donc,

$$v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Et ainsi,

$$E(X_n) = v_n + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}$$

(a) On propose la fonction suivante :

```python
def simu(n):
    x=0
    for k in range(n):
        if rd.random()<1/3 :
            x= x+1
        else:
            x= 0
    return x
```

(b) On peut proposer le programme suivant :

```python
import numpy.random as rd
def simu(n):
    X=np.zeros(n+1)
    X[0]=0
    for k in range(n-1):
```

```
        if rd.random()<1/3 :
            X[k+1]= X[k]+1
    return X
```

(c) Dans la console, exécuter la fonction avec $n = 100$. Quelle est l'abscisse minimale et maximale dans votre simulation ? N'hésitez pas à l'exécuter plusieurs fois !
On pourra utiliser les commandes `np.max` *et* `np.min`

Exercice 2

($\Rightarrow$) Supposons que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$, montrons que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$.
On sait déjà que $0_E \in \operatorname{Ker}(f)$ et $0_E \in \operatorname{Im}(f)$ car $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E. Ainsi $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.
Soit maintenant $x \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.
En particulier, $x \in \operatorname{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Im}(f)$ donc il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$.
Puis en combinant les deux, on obtient $f(f(a)) = f(x) = 0$ d'où $a \in \operatorname{Ker}(f \circ f)$. Par hypothèse, comme $\operatorname{Ker}\left(f^2\right) = \operatorname{Ker}(f)$, on en déduit $a \in \operatorname{Ker}(f)$. D'où $f(a) = 0$. D'où $x = 0$ puisque $x = f(a)$. Ainsi $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subset \{0_E\}$. On a donc montré par double inclusion que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$

($\Leftarrow$) Supposons que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$ et montrons que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$.
On raisonne par double inclusion :
Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$: alors $f(x) = 0$ donc $f(f(x)) = f(0) = 0$ par linéarité de f d'où $x \in \operatorname{Ker}(f \circ f)$. On a donc $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$.
Remarque Cette inclusion est donc toujours vraie quelle que soit l'application linéaire f.

Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$ donc $f(f(x)) = 0$. On remarque alors que cela signifie également que $f(x) \in \operatorname{Ker}(f)$ (puisque $f(f(x)) = 0$). Comme par ailleurs, par définition de l'image, $f(x) \in \operatorname{Im}(f)$, on en déduit que $f(x) \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.
Par hypothèse, on obtient $f(x) = 0_E$. D'où $x \in \operatorname{Ker}(f)$.

Exercice 3

1. Pour tout $x \in E$, commençons par vérifier que $f(x) \in E$.
Soit $x \in E$. Alors $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ et donc $\varphi(x)u \in E$ (comme $u \in E$) et par suite $x + \varphi(x)u \in E$. Ainsi $\boxed{f(x) \in E}$.
Montrons maintenant que f est une application linéaire.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in E^2$. Alors, on a :
$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \lambda x + y + \varphi(\lambda x + y)u \\ &= \lambda x + y + (\lambda\varphi(x) + \varphi(y))u \quad \text{par linéarité de } \varphi \\ &= \lambda(x + \varphi(x)u) + y + \varphi(y)u. \end{aligned}$$
ce qui donne bien $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Donc f est $\boxed{\text{linéaire}}$.
Conclusion : f est bien un $\boxed{\text{endomorphisme de } E.}$

2. Raisonnons par double inclusion.
— Soit $x \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Alors $\varphi(x) = 0$ et donc $f(x) = x$ i.e. $(f - \operatorname{Id}_E)(x) = 0_E$. Donc $x \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$. On a ainsi montré que $\operatorname{Ker}(\varphi) \subset \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$.
— Soit maintenant $x \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$. Alors $f(x) - x = 0_E$ i.e. $\varphi(x)u = 0_E$. Comme u est un vecteur non nul alors $\varphi(x) = 0$ i.e. $x \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. On a ainsi montré que $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(\varphi)$.
Conclusion : $\boxed{\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(\varphi)}$.

3. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$ i.e. $x + \varphi(x)u = 0$ et donc $x = -\varphi(x)u$. Appliquons φ. On trouve
$$\varphi(x) = \varphi(-\varphi(x)u) = -\varphi(x)\varphi(u) \quad \text{par linéarité de } \varphi.$$
Ainsi
$$\varphi(x)(1 + \varphi(u)) = 0.$$
Or $\varphi(u) + 1 \neq 0$ donc $\varphi(x) = 0$. Ainsi $x \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ et comme $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(\varphi)$, on a $x \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ et donc $f(x) = x$, or $f(x) = 0$ donc $x = 0_E$. Donc $\operatorname{Ker}(f) \subset \{0_E\}$, donc, l'inclusion réciproque étant immédiate, $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.
Conclusion : l'endomorphisme f est $\boxed{\text{injectif}}$.

4. On remarque que $f(u) = u + \varphi(u)u = 0_E$ donc $u \in \mathrm{Ker}(f)$. Or $u \neq 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$. Donc f $\boxed{\text{n'est pas injectif}}$.

   Soit maintenant $x \in E$. Alors, par linéarité de f et comme $f(u) = 0_E$,

   $$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x + \varphi(x)u) = f(x) + \varphi(x)f(u) = f(x)$$

   Donc $\boxed{f \circ f = f}$.