Corrigé du DM n° 9

Exercice 1

1. **Etude d'un cas particulier**
2. (a) Commençons par vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_2[x]$. Comme $P \in \mathbb{R}_2[x]$, on a : d'une part $\deg(P) \leqslant 2$ donc $\deg(P') \leqslant 1$, comme $\deg(x+1) = 1$, on en déduit que $\deg((x+1)P') \leqslant 2$.
D'autre part, $\deg(P'') \leqslant 0$ et $\deg(-2x^2) = 2$ donc $\deg(-2x^2P'') \leqslant 2$.
On a donc bien $\boxed{\Phi(P) \in \mathbb{R}_2[x]}$.
Il reste à montrer que Φ est une application linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[x]^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda P + Q) &= (x+1)(\lambda P + Q)' - 2x^2(\lambda P + Q)'' \\
&= (x+1)(\lambda P' + Q') - 2x^2(\lambda P'' + Q'') \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\
&= (x+1)\lambda P' + (x+1)Q' - 2x^2\lambda P'' - 2x^2Q'' \\
&= \lambda((x+1)P' - 2x^2P'') + (x+1)Q' - 2x^2Q'' \\
&= \lambda\Phi(P) + \Phi(Q).
\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])}$.

(b) Soit $\left(1, x, x^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, on a alors :

$$\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Vect}\left(\Phi(1), \Phi(x), \Phi\left(x^2\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(0, x+1, 2x - 2x^2\right) = \mathrm{Vect}\left(x+1, x - x^2\right).$$

La famille de polynômes $\left\{x+1, x-x^2\right\}$ est génératrice de $\mathrm{Im}(\Phi)$. Elle est de plus libre car formée de polynômes non-nuls de degrés distincts donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Elle forme donc une base de $\mathrm{Im}(\Phi)$.
Comme une base de $\mathrm{Im}(\Phi)$ ne contient que deux vecteurs, contrairement à la base canonique de l'espace d'arrivée qui en contient trois, $\mathrm{Im}(\Phi) \subsetneq \mathbb{R}_2[x]$ donc Φ $\boxed{\text{n'est pas surjective}}$.

(c) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, on a $\Phi(P) = 0$. Comme $P \in \mathbb{R}_2[x]$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(P)(x) = (x+1)(2ax + b) + 2x^2(2a) = -2ax^2 + (2a+b)x + b.$$

Comme $\Phi(P) = 0$, on obtient, par identification des coefficients, le système suivant :

$$\begin{cases} -2a = 0 \\ 2a + b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

Ainsi $P(x) = c$ et finalement, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{P : x \mapsto c, c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1) = \mathrm{Vect}\,(1)$. La famille (1) est de plus libre (un seul vecteur non nul), donc est une base de $\mathrm{Ker}(\Phi)$.
Comme $\mathrm{Ker}(\Phi) \neq \left\{0_{\mathbb{R}[x]}\right\}$, Φ $\boxed{\text{n'est pas injective}}$.

3. **Cas général**

(a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$, montrons que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$. Comme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on a : $\deg(P) \leqslant n$. Alors

$$\deg\left((x+1)P'\right) = \deg(x+1) + \deg\left(P'\right) = 1 + \deg\left(P'\right) \leqslant 1 + (n-1) = n$$

et de même,

$$\deg\left(-2x^2P''\right) = 2 + \deg\left(P''\right) \leqslant 2 + (n-2) \leqslant n,$$

donc par somme, $\deg(\Phi(P)) \leqslant n$ et $\boxed{\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]}$.
Il reste à montrer que Φ est une application linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soient $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P+Q) &= (x+1)(\lambda P+Q)' - 2x^2(\lambda P+Q)'' \\ &= (x+1)(\lambda P'+Q') - 2x^2(\lambda P''+Q'') \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= (x+1)\lambda P' + (x+1)Q' - 2x^2\lambda P'' - 2x^2 Q'' \\ &= \lambda((x+1)P' - 2x^2P'') + (x+1)Q' - 2x^2Q'' \\ &= \lambda\Phi(P) + \Phi(Q).\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x])}$.

(b) On a déjà calculé $\Phi(1) = 0$, et $\Phi(x) = x+1$.
Pour $k \geqslant 2$,

$$\Phi\left(x^k\right) = (x+1)\left(kx^{k-1}\right) - 2x^2\left(k(k-1)x^{k-2}\right) = \left(3k-2k^2\right)x^k + kx^{k-1}.$$

(c) Soit $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, on a alors :

$$\operatorname{Im}(\Phi) = \operatorname{Vect}\left(\Phi(1), \Phi(x), \ldots, \Phi\left(x^k\right), \ldots, \Phi(x^n)\right) = \operatorname{Vect}\left(\Phi(x), \ldots, \Phi\left(x^k\right), \ldots, \Phi(x^n)\right).$$

On a pu "enlever" $\Phi(1)$ car $\Phi(1) = 0$. On a alors :

$$\operatorname{Im}(\Phi) = \operatorname{Vect}\left(x+1, -2x^2+2x, -9x^3+3x^2, -20x^4+4x^3, \ldots, (3n-2n^2)x^n + nx^{n-1}\right) = \operatorname{Vect}(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n).$$

La famille $(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n)$ est donc génératrice de $\operatorname{Im}(\Phi)$. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i = 0$ soit :

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(-2x^2+2x) + \lambda_3(-9x^3+3x^2) + \ldots + \lambda_n((3n-2n^2)x^n + nx^{n-1} = 0$$

puis en regroupant les termes par degré :

$$\lambda_1 + (\lambda_1+2\lambda_2)x + (-2\lambda_2+3\lambda_3)x^2 + (-9\lambda_3+4\lambda_4)x^3 + \ldots + ((3n-2n^2)\lambda_n)x^n = 0.$$

Par identification, on obtient :

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \quad -2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \quad -9\lambda_3 + 4\lambda_4, \ldots, (3n-2n^2)\lambda_n = 0$$

soit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

La famille $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ est donc libre. En conclusion, elle forme une $\boxed{\text{base de } \operatorname{Im}(\Phi)}$.

Remarque Les polynômes $(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n)$ sont de degré croissant de 1 en 1, on dit alors que la famille est échelonnée en degrés. Un théorème (hors programme) assure qu'une famille de polynômes non-nuls échelonnée en degrés est libre.

(d) On a vu que $\Phi(1) = 0$, donc $\boxed{1 \in \operatorname{Ker}(\Phi)}$, et il convient car $1 \neq 0_{\mathbb{R}[x]}$. Ainsi $\operatorname{Vect}(1) \subset \operatorname{Ker}(\phi)$.
Remarque Lorsqu'on aura le Chapitre 20, on pourra conclure en une ligne grâce à un argument de dimension que $\operatorname{Vect}(1) = \operatorname{Ker}(\phi)$

Exercice 2

1. (a) Il suffit de faire le calcul.

(b) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 I + \lambda_2 A + \lambda_3 A^2 = 0_3$. On a alors :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

On obtient en particulier le système : $\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 = 0\end{cases}$, soit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille (I, A, A^2) est donc $\boxed{\text{libre}}$.

2. (a) On remarque que
$$\mathcal{E} = \left\{aI + bA + cA^2,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}\left(I, A, A^2\right)$$
Ainsi $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\left(I, A, A^2\right)$ en est une famille génératrice. Comme elle est libre d'après la question 1.(b), c'est une $\boxed{\text{base de } \mathcal{E}}$.

(b) Comme $M \in \mathcal{E}$ et que (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$, il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aI + bA + cA^2$. On a alors
$$AM = aA + bA^2 + cA^3 = (2c + a)A + bA^2 \in \mathcal{E}$$
comme $\mathcal{E}$ est engendré par (I, A, A^2).

Autre méthode Poser $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et faire le calcul de AM à la main puis vérifier que la matrice obtenue est dans $\mathcal{E}$.

3. (a) D'après 2.(b), on a : $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ donc il suffit de montrer que f est une application linéaire.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $(M, N) \in \mathcal{E}^2$ alors
$$f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N).$$
Ainsi $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathcal{E})}$.

(b) Commençons par déterminer l'image de f. Pour cela, on considère la famille $\left(I, A, A^2\right)$ qui est bien génératrice de $\mathcal{E}$ car on a montré à la question 2.(a) que c'était une base de $\mathcal{E}$. Ainsi,
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(I), f(A), f\left(A^2\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(A, A^2, A^3\right) = \mathrm{Vect}\left(A, A^2, 2A\right) = \mathrm{Vect}\left(A, A^2\right).$$
Donc la famille $\left(A, A^2\right)$ est génératrice, de plus elle est libre comme sous-famille de famille libre (I, A, A^2) (cf 1.(b)). C'est donc une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Im}(f)}$.
Déterminons maintenant le noyau de f. Soit $M \in \mathrm{Ker}(f)$, commençons par décomposer la matrice M dans la base (I, A, A^2), soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aI + bA + cA^2$. On a alors (en reprenant le calcul de la question 2.(b) :
$$f(M) = 0 \Leftrightarrow AM = 0 \Leftrightarrow (2c + a)A + bA^2 = 0$$
Comme la famille (A, A^2) est libre, on en déduit que $\Leftrightarrow \begin{cases} 2c + a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
Autre méthode On peut aussi revenir à l'identification des coefficients en écrivant les coefficients des matrices A et A^2.

Finalement
$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{aI + bA + cA^2 \mid AM = 0_3\right\} = \left\{-2cI + cA^2, c \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(-2I + A^2\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right).$$
La famille libre car constituée d'un seul vecteur non nul. Ainsi $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ est une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Ker}(f)}$.
On a : $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_3\}$ et donc l'application f $\boxed{\text{n'est pas injective}}$.
De plus, $\mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathcal{E}$ car la base de $\mathrm{Im}(f)$ est composée de deux vecteurs alors qu'une base de $\mathcal{E}$ est composée de trois vecteurs.
Remarque On verra dans le Chapitre 20 un argument plus efficace pour justifier cela : la dimension.
En conclusion, l'application f $\boxed{\text{n'est pas surjective}}$.

(c) Soit $M \in \mathcal{E}$, $(f \circ f \circ f)(M) = f \circ f(AM) = f\left(A^2 M\right) = A^3 M = 2AM = 2f(M)$ d'où $\boxed{f \circ f \circ f = 2f}$.

4. Soit $M \in \mathcal{E}$ alors comme (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aI + bA + cA^2$. Par linéarité de f, on a :
$$f(M) = f(aI + bA + cA^2) = af(I) + bf(A) + cf(A^2) = (2c + a)A + bA^2$$
en utilisant le calcul fait à la question 2.(b).
Alors $AM = I + A^2 \Leftrightarrow (2c+a)A + bA^2 = I + A^2 \Leftrightarrow -I + (2c+a)A + (b-1)A^2 = 0_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 0 \\ 2c + a = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases}$ car $\left(I, A, A^2\right)$ est

une famille libre. Le système obtenu n'a pas de solution donc $\boxed{\text{il n'existe pas de solution}}$ dans $\mathcal{E}$ à l'équation $f(M) = I+A^2$.

Autre méthode Poser $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ calculer $f(M)$ et identifier avec les coefficients de $I + A^2$.

Exercice 3

(⇒) Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$, montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.
On sait déjà que $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$ et $0_E \in \mathrm{Im}(f)$ car $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E. Ainsi $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
Soit maintenant $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
En particulier, $x \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$.
Puis en combinant les deux, on obtient $f(f(a)) = f(x) = 0$ d'où $a \in \mathrm{Ker}(f \circ f)$. Par hypothèse, comme $\mathrm{Ker}\left(f^2\right) = \mathrm{Ker}(f)$, on en déduit $a \in \mathrm{Ker}(f)$. D'où $f(a) = 0$. D'où $x = 0$ puisque $x = f(a)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0_E\}$. On a donc montré par double inclusion que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$

(⇐) Supposons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ et montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.
On raisonne par double inclusion :
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$: alors $f(x) = 0$ donc $f(f(x)) = f(0) = 0$ par linéarité de f d'où $x \in \mathrm{Ker}(f \circ f)$. On a donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.
Remarque Cette inclusion est donc toujours vraie quelle que soit l'application linéaire f.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ donc $f(f(x)) = 0$. On remarque alors que cela signifie également que $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ (puisque $f(f(x)) = 0$). Comme par ailleurs, par définition de l'image, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, on en déduit que $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
Par hypothèse, on obtient $f(x) = 0_E$. D'où $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 4

1. Pour tout $x \in E$, commençons par vérifier que $f(x) \in E$.
   Soit $x \in E$. Alors $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ et donc $\varphi(x)u \in E$ (comme $u \in E$) et par suite $x + \varphi(x)u \in E$. Ainsi $\boxed{f(x) \in E}$.
   Montrons maintenant que f est une application linéaire.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in E^2$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \lambda x + y + \varphi(\lambda x + y)u \\ &= \lambda x + y + (\lambda\varphi(x) + \varphi(y))u \quad \text{par linéarité de } \varphi \\ &= \lambda(x + \varphi(x)u) + y + \varphi(y)u. \end{aligned}$$

   ce qui donne bien $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Donc f est $\boxed{\text{linéaire}}$.
   Conclusion : f est bien un $\boxed{\text{endomorphisme de } E.}$
2. Raisonnons par double inclusion.
   — Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $\varphi(x) = 0$ et donc $f(x) = x$ i.e. $(f - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. On a ainsi montré que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.
   — Soit maintenant $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Alors $f(x) - x = 0_E$ i.e. $\varphi(x)u = 0_E$. Comme u est un vecteur non nul alors $\varphi(x) = 0$ i.e. $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On a ainsi montré que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(\varphi)}$.
3. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$ i.e. $x + \varphi(x)u = 0$ et donc $x = -\varphi(x)u$. Appliquons φ. On trouve

$$\varphi(x) = \varphi(-\varphi(x)u) = -\varphi(x)\varphi(u) \quad \text{par linéarité de } \varphi.$$

   Ainsi

$$\varphi(x)(1 + \varphi(u)) = 0.$$

   Or $\varphi(u) + 1 \neq 0$ donc $\varphi(x) = 0$ et donc $x = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$, donc, l'inclusion réciproque étant immédiate, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Conclusion : l'endomorphisme f est $\boxed{\text{injectif}}$.

4. On remarque que $f(u) = u + \varphi(u)u = 0_E$ donc $u \in \mathrm{Ker}(f)$. Or $u \neq 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$. Donc f $\boxed{\text{n'est pas injectif}}$.

   Soit maintenant $x \in E$. Alors, par linéarité de f et comme $f(u) = 0_E$,

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x + \varphi(x)u) = f(x) + \varphi(x)f(u) = f(x)$$

   Donc $\boxed{f \circ f = f}$.