

Devoir maison n° 9

Ce devoir maison est composée d'un exercice et d'un problème obligatoires. Les exercices 2 et 3 sont facultatifs. Bon courage !

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit Φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par :

$$\Phi(P) = (x + 1)P' - 2x^2P''.$$

1. **Etude d'un cas particulier** : Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 2$.

- (a) Vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
- (b) Déterminer une base de l'image de Φ . L'application Φ est-elle surjective ?
- (c) Déterminer une base du noyau de Φ . L'application Φ est-elle injective ?

2. **Cas général** : Dans toute la suite n est un entier supérieur ou égal à 2.

- (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (b) Calculer pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Phi(x^k)$.
On pourra distinguer les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k \geq 2$.
- (c) En déduire une base de $\text{Im}(\Phi)$.
- (d) Déterminer un vecteur non nul de $\text{Ker}(\Phi)$.

Problème 1

La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$, et pour tout événement B vérifiant $P(B) \neq 0$, on note $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B .

Un mobile se déplace aléatoirement le long d'un axe horizontal d'origine O , sur des points à coordonnées entières, positives ou nulles. Les déplacements sont effectués selon le protocole suivant :

- à l'instant zéro, le mobile est sur l'origine O d'abscisse 0 ;
- si, pour tout entier naturel n , le mobile se trouve à l'instant n sur le point d'abscisse k ($0 \leq k \leq n$), alors il sera à l'instant $n + 1$, soit sur le point d'abscisse $k + 1$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$, soit sur le point O avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n , soit X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n . Ainsi $X_0 = 0$.

On note $E(X_n)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_n .

1. Vérifier que X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$. Que vaut $E(X_1)$?
2. (a) Montrer que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_2 est $\{0, 1, 2\}$.
(b) Montrer que l'ensemble $\{[X_1 = 1], [X_1 = 0]\}$ forme un système complet d'événements. En déduire les égalités suivantes :

$$P([X_2 = 0]) = \frac{2}{3}, \quad P([X_2 = 1]) = \frac{2}{9} \quad \text{et} \quad P([X_2 = 2]) = \frac{1}{9}$$

- (c) Calculer $E(X_2)$.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_n .
 4. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on considère les événements $[X_n = k]$ et $[X_{n-1} = k - 1]$.
(a) Établir l'inclusion d'événements suivante : $[X_n = k] \subset [X_{n-1} = k - 1]$.
(b) En déduire l'égalité : $[X_n = k] = [X_n = k] \cap [X_{n-1} = k - 1]$.
(c) Établir l'égalité : $P([X_n = k]) = \frac{1}{3}P([X_{n-1} = k - 1])$.

- (d) Dédurre du résultat précédent que l'on a : $P([X_n = 0]) = \frac{2}{3}$.
5. (a) En utilisant la question 4.(c), montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur k , que pour tout entier n supérieur ou égal à 0 et tout entier k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$P([X_n = k]) = \left(\frac{1}{3}\right)^k P([X_{n-k} = 0])$$

- (b) En déduire pour tout entier naturel n , l'expression de $P([X_n = n])$ en fonction de n .
- (c) Donner pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la loi de la variable aléatoire X_n .
6. (a) En utilisant la définition de $E(X_n)$ et la question 4.(c), montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$E(X_n) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k P([X_{n-1} = k - 1])$$

- (b) En déduire la relation de récurrence :
- $$E(X_n) = \frac{1}{3} E(X_{n-1}) + \frac{1}{3}$$
- (c) Déterminer l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n .

7. Python

- (a) Recopier et compléter la fonction suivante pour qu'elle simule l'expérience aléatoire étudiée et renvoie la valeur prise par X_n où l'entier n est le paramètre d'entrée.

```

1 def simu(n):
2     x=0
3     for k in range(n):
4         if ..... :
5             x = .....
6         else :
7             x = .....
8     return x
    
```

Le devoir étant fait chez vous, n'hésitez pas à tester votre fonction sur Python.

- (b) Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie le vecteur contenant toutes les abscisses du mobile.
- (c) Dans la console, exécuter la fonction avec $n = 100$. Quelle est l'abscisse minimale et maximale dans votre simulation ? N'hésitez pas à l'exécuter plusieurs fois !
On pourra utiliser les commandes np.max et np.min

Exercice 2 *Facultatif mais recommandé si vous avez eu la moyenne au dernier DS*

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E . Montrer que

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}.$$

Exercice 3 *Facultatif*

Soient E un espace vectoriel, u un vecteur de E non-nul et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. On pose

$$f : x \in E \mapsto x + \varphi(x)u$$

- Vérifier que f est un endomorphisme de E .
- Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Ker}(\varphi)$.
- On suppose dans cette question que $\varphi(u) \neq -1$. Montrer que f est injectif.
- On suppose dans cette question que $\varphi(u) = -1$. Montrer que f n'est pas injectif et vérifier que $f \circ f = f$.