Devoir maison n° 9

Ce devoir maison est composée de quatre exercices. L'exercice 4 est facultatif. Bon courage !

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit Φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par :

$$\Phi(P) = (x+1)P' - 2x^2P''.$$

1. **Etude d'un cas particulier :** Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 2$.
   (a) Vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
   (b) Déterminer une base de l'image de Φ. L'application Φ est-elle surjective ?
   (c) Déterminer une base du noyau de Φ. L'application Φ est-elle injective ?
2. **Cas général :** Dans toute la suite n est un entier supérieur ou égal à 2.
   (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (b) Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\quad \Phi\left(x^k\right)$.
   On pourra distinguer les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k \geqslant 2$.
   (c) En déduire une base de $\mathrm{Im}(\Phi)$.
   (d) Déterminer un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices suivantes : $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. (a) Montrer que $A^3 = 2A$.
   (b) Montrer que la famille $\left(I, A, A^2\right)$ est libre, où I est la matrice identité de taille 3.
2. (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
   (b) Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.
3. On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie par, pour toute matrice $M \in \mathcal{E}$, $f(M) = AM$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
   (c) Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.
4. Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}.$$

Exercice 4 *Facultatif*

Soient E un espace vectoriel, u un vecteur de E non-nul et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. On pose

$$f : x \in E \longmapsto x + \varphi(x)u$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
3. On suppose dans cette question que $\varphi(u) \neq -1$. Montrer que f est injectif.
4. On suppose dans cette question que $\varphi(u) = -1$. Montrer que f n'est pas injectif et vérifier que $f \circ f = f$.

