

## Corrigé du DM n° 8

### Problème 1

1. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $0 \leq \tan(t) \leq 1$ . Ainsi :  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $0 \leq (\tan(t))^{n+1} \leq (\tan(t))^n$ . Par croissance de l'intégrale on obtient :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^{n+1} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n dt$$

i.e.  $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ . Ceci étant vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a montré que la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  était **décroissante**.

- (b) La suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n \geq 0$  (d'après la question précédente), elle est donc minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, elle est donc **convergente**.

2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . On a par linéarité de l'intégrale,

$$I_n + I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n + (\tan(t))^{n-2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^{n-2} ((\tan(t))^2 + 1) dt = \left[ \frac{(\tan(t))^{n-1}}{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n-1}$$

- (b) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . En utilisant la décroissance de la suite  $(I_k)_{k \geq 0}$ , on obtient :

$$I_n + I_{n+2} \leq 2I_n \leq I_n + I_{n-2},$$

or  $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+2-1} = \frac{1}{n+1}$  et  $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$ . On obtient donc l'encadrement pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,

$$\frac{1}{n+1} \leq 2I_n \leq \frac{1}{n-1}.$$

- (c) On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$  donc d'après le théorème d'encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2I_n = 0$  et donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}.$$

De plus, d'après la question précédente, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\frac{n}{2(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{2(n-1)}$$

Or  $\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2(1+\frac{1}{n})}$  et  $\frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2(1-\frac{1}{n})}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$  et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2}$  ainsi, par le théorème d'encadrement, on en déduit que  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \frac{1}{2}}$ .

3. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a comme pour la question 1.,  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $(\tan(t))^{n+1} \leq (\tan(t))^n$ . De plus,  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $\sin(t) \geq 0$  donc  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ,

$$(\tan(t))^{n+1} \sin(t) \leq (\tan(t))^n \sin(t).$$

En utilisant la croissance de l'intégrale, on obtient alors  $J_{n+1} \leq J_n$ . Ceci étant vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $(J_n)_{n \geq 0}$  est **décroissante**.

(b) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Posons  $\begin{cases} u(t) = (\tan(t))^n \\ v'(t) = \sin(t) \end{cases}$  alors  $\begin{cases} u'(t) = n(1 + \tan(t)^2)(\tan(t))^{n-1} \\ v(t) = -\cos(t) \end{cases}$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} J_n &= [-\cos(t)(\tan(t))^n]_0^{\frac{\pi}{4}} + n \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^{n-1} (1 + (\tan(t))^2) \cos(t) dt \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + n \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^{n-2} (\tan(t) \cos(t)) dt + n \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n (\tan(t) \cos(t)) dt \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + nJ_{n-2} + nJ_n \end{aligned}$$

On a donc la relation demandée à savoir  $(n - 1)J_n + nJ_{n-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(c) On utilise ici la même méthode qu'à la question 2.(b). Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . La suite  $(J_k)_{k \geq 0}$  étant décroissante, on a

$$(2n - 1)J_n \leq (n - 1)J_n + nJ_{n-2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{i.e.} \quad J_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2(2n - 1)}.$$

De même on a

$$(2n + 3)J_n \geq (n + 1)J_{n+2} + (n + 2)J_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{i.e.} \quad J_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2(2n + 3)}$$

On a donc bien l'encadrement souhaité.

(d) On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{2(2n + 3)} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{2(2n - 1)} = 0$  donc d'après le théorème d'encadrement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ .

De plus, en utilisant l'encadrement de la question 3.(c), on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,

$$\frac{n\sqrt{2}}{2(2n + 3)} \leq nJ_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{2(2n - 1)}.$$

Or  $\frac{n\sqrt{2}}{2(2n + 3)} = \frac{\sqrt{2}}{2(2 + \frac{3}{n})}$  et  $\frac{n\sqrt{2}}{2(2n - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2(2 - \frac{1}{n})}$ , comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , on en déduit à l'aide du

théorème d'encadrement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_n = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

4. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'application  $h : t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \mapsto (\tan(t))^n$  est continue, à valeurs positives et n'est pas l'application nulle (car  $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ). Ainsi par stricte positivité de l'intégrale, son intégrale est strictement positive i.e.  $I_n > 0$ .

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], (\tan(t))^n \geq 0$  et  $0 \leq \sin(t) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Ainsi

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], 0 \leq (\tan(t))^n \sin(t) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} (\tan(t))^n$$

On en déduit par croissance de l'intégrale que  $0 \leq J_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} I_n$ . En divisant par  $I_n$  (qui est strictement positif) on

obtient le résultat i.e.  $0 \leq \frac{J_n}{I_n} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(c) On a pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{J_n}{I_n} = \frac{nJ_n}{nI_n}$$

or d'après la question 2.(c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \frac{1}{2}$  et d'après la question 3.(d),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_n = \frac{\sqrt{2}}{4}$  donc par quotient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J_n}{I_n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- (d) L'application  $\sin$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  et :  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \sin'(t) = \cos(t) > 0$ . Donc  $\sin$  est strictement croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  et  $\sin$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ . Donc d'après le théorème de la bijection,  $\sin$  réalise une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  dans

$$\sin\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[\sin(0), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

- (e) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme d'après la question 4.(b),

$$\frac{J_n}{I_n} \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

alors par définition d'une bijection il existe un unique  $c_n \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  tel que  $\frac{J_n}{I_n} = \sin(c_n)$  i.e.  $J_n = \sin(c_n) I_n$ .

- (f) Notons  $g$  l'application réciproque de  $\sin$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ . Ainsi  $g$  est définie sur  $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  et à valeurs dans  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ . D'après

le théorème de la bijection  $g$  est continue sur  $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J_n}{I_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Donc par composition de limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\frac{J_n}{I_n}\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ .