Devoir maison n° 8

Ce devoir maison est composé d'un unique problème. Bon courage !

Problème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n \; \mathrm{d}t$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n \sin(t) \mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$,
   $$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}.$$
   (b) En déduire en utilisant la décroissance de $(I_n)_{n \geqslant 0}$ que : $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$,
   $$\frac{1}{n+1} \leqslant 2I_n \leqslant \frac{1}{n-1}.$$
   (c) Déterminer alors la limite de la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ et la limite de la suite $(nI_n)_{n \geqslant 0}$.
3. (a) Montrer que la suite $(J_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$,
   $$(n-1)J_n + nJ_{n-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$,
   $$\frac{\sqrt{2}}{2(2n+3)} \leqslant J_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2(2n-1)}.$$
   (d) Déterminer alors la limite de la suite $(J_n)_{n \geqslant 0}$ et la limite de la suite $(nJ_n)_{n \geqslant 0}$.
4. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $$0 \leqslant \frac{J_n}{I_n} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$
   (c) A l'aide des questions 2.(c) et 3.(d), montrer que
   $$\frac{J_n}{I_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{2}}{2}$$
   (d) Vérifier que l'application sin réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur un intervalle à déterminer.
   (e) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! c_n \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $J_n = \sin(c_n) I_n$.
   (f) Montrer finalement que $(c_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

