

## Corrigé du DM n° 7

### Exercice 1

1. (a) La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ , la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc par composée  $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . De plus,  $x \mapsto x^3$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc par produit  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .  
Calculons sa dérivée pour  $x \neq 0$ , on a :

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi pour  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Étudions sa dérivabilité en 0. On a pour  $x \neq 0$ ,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or  $\left|x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2$ . On sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  donc d'après le théorème d'encadrement

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Ainsi  $f$  est dérivable en 0 et on  $f'(0) = 0$ .

- (b) La fonction  $x \mapsto 1 - e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $\mathbb{R}^*$ . On a donc pour tout  $x < 0$ ,  $g'(x) = -e^x$ .  
Les fonctions  $x \mapsto 2(1 - e^x)$  et  $x \mapsto e^x + 1$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $x \mapsto e^x + 1$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  ainsi par quotient  $x \mapsto \frac{2(1 - e^x)}{e^x + 1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On a donc pour tout  $x > 0$ ,

$$g'(x) = \frac{-2e^x(e^x + 1) - 2(1 - e^x)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{-4e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

On a donc pour  $x > 0$ ,  $g'(x) = \frac{-4e^x}{(e^x + 1)^2}$ .

Reste à étudier la dérivabilité en 0. Étudions pour cela les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement. On a pour  $x < 0$ ,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{1 - e^x - 0}{x - 0} = -\frac{e^x - 1}{x}.$$

On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0, la fonction exponentielle est dérivable en 0 donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -e^0 = -1.$$

Ainsi  $g$  est dérivable à gauche de 0 et  $g'_g(0) = -1$ .

On a pour  $x > 0$ ,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\frac{2(1 - e^x)}{e^x + 1} - 0}{x - 0} = \frac{2(1 - e^x)}{x(e^x + 1)} = \frac{2}{e^x - 1} \times \frac{1 - e^x}{x}$$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^x}{x} = -1$  d'après le calcul précédent et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{e^x + 1} = 1$ . On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -1.$$

Ainsi  $g$  est dérivable à droite de 0 et  $g'_d(0) = -1$ .

Comme  $g'_g(0) = g'_d(0) = -1$ , on en déduit que  $g$  est dérivable en 0 et que  $\boxed{g'(0) = -1}$ .

(c) La fonction  $x \mapsto \frac{x-1}{x+2}$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  comme fonction rationnelle. La fonction  $x \mapsto \arctan(x)$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc la fonction  $h$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  comme composée de fonctions dérivables.

La fonction  $h$  est de la forme  $v \circ u$  avec  $u(x) = \frac{x-1}{x+2}$  et  $v(x) = \arctan(x)$ . On a :

$$u'(x) = \frac{x+2 - (x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

et

$$v'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

ainsi par composée

$$h'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2} = \frac{3}{(x+2)^2 + (x-1)^2}.$$

2. (a) Commençons par modifier l'expression de la fonction  $j$  pour simplifier les calculs :

$$f_1(x) = \ln((1+x^2)^{\frac{1}{3}}) - \ln(\sqrt{4+x^3}) = \frac{1}{3} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln(4+x^3).$$

On a alors :

$$f_1'(x) = \frac{1}{3} \times \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \times \frac{3x^2}{4+x^3} = \frac{2x}{3(1+x^2)} - \frac{3x^2}{2(4+x^3)}.$$

Ainsi  $\boxed{f_1'(x) = \frac{2x}{3(1+x^2)} - \frac{3x^2}{2(4+x^3)}}$ .

(b) La fonction  $f_2$  est de la forme  $\sqrt{u}$  avec  $u(x) = 1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}$ . La fonction  $u$  est elle-même de la forme  $u(x) = 1 + \sqrt{v}$  avec  $v(x) = 2 + \sqrt{x}$ . On a  $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . On a donc  $u'(x) = \frac{v'}{2\sqrt{v}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{2 + \sqrt{x}}}$ . On a alors :

$$f_2'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{2 + \sqrt{x}}} = \frac{1}{8\sqrt{x}\sqrt{2 + \sqrt{x}}\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}}.$$

Ainsi  $\boxed{f_2'(x) = \frac{1}{8\sqrt{x}\sqrt{2 + \sqrt{x}}\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}}}$ .

### Exercice 2 d'après ESC 2012 voie T

#### Partie I - Etude d'une fonction

1. (a) On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  donc par sommes  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} = -\infty$  donc par sommes  $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$ .

(b) On remarque que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) - (x-1) = -e^{-x}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = 0$  et on peut affirmer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x - 1$  est asymptote oblique à la courbe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions de référence dérivables sur  $\mathbb{R}$ . On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = 1 + e^{-x}.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-x} > 0$ , ainsi  $f'(x) > 0$ . On a alors le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
Variations de $f$	$-\infty$	$+\infty$

3. (a) D'après l'étude précédente, la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , de plus elle est continue (car dérivable) sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . D'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Ainsi  $0 \in \mathbb{R}$  possède une unique antécédent par  $f$ , il existe donc un unique  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

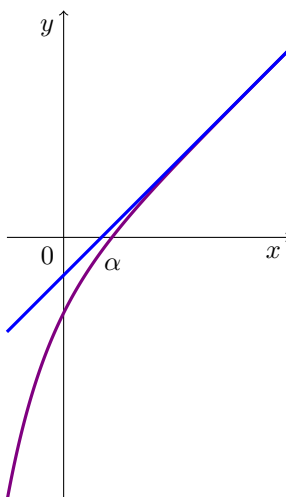
(b) On a  $f(1) = 1 - e^{-1} - 1 = -e^{-1} < 0$  et  $f(2) = 2 - e^{-2} - 1 = 1 - e^{-2} \simeq 0.9 > 0$ . Ainsi on a :

$$f(1) \leq f(\alpha) = 0 \leq f(2)$$

comme  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que :

$$1 \leq \alpha \leq 2 \quad \text{soit} \quad \alpha \in [1, 2].$$

4. On a les courbes suivantes :



**Partie II - Approximation de  $\alpha$**

1. On remarque que pour  $x \in \mathbb{R}$  l'on a l'équivalence suivante :

$$h(x) = x \iff x - h(x) = 0 \iff x - e^{-x} - 1 = 0 \iff f(x) = 0$$

Or d'après la question 3), il existe un unique  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . L'équation  $h(x) = x$  admet donc comme unique solution le  $\alpha \in \mathbb{R}$  défini à la question 3).

2. La fonction  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ . On a alors pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$h'(x) = -e^{-x}$$

On a alors pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|h'(x)| = e^{-x}$ .

Soit  $x \in [1, 2]$ , par croissance de la fonction  $\exp$  sur  $\mathbb{R}$ , on a :

$$1 \leq x \leq 2 \iff -1 \geq -x \geq -2 \iff e^{-1} \geq e^{-x} \geq e^{-2} \iff e^{-2} \leq e^{-x} \leq \frac{1}{e}$$

On en déduit donc que pour  $x \in [1, 2]$ ,  $|h'(x)| \leq \frac{1}{e}$ .

3. Montrons ce résultat par récurrence et posons pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $1 \leq u_n \leq 2$  ».

**Initialisation** ( $n = 0$ ) On a  $u_0 = 1 \in [1, 2]$ . Ainsi  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hérédité** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie et montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

Remarquons d'abord que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h'(x) < 0$  donc la fonction  $h$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

Par hypothèse de récurrence,  $u_n \in [1, 2]$  et comme  $h$  est décroissante, on en déduit que  $h(u_n) \in [h(2), h(1)]$ . Or  $h(1) \simeq 1,4 < 2$  et  $h(2) \simeq 1,1 > 1$ , ainsi

$$u_{n+1} = h(u_n) \in [1, 2].$$

$\mathcal{P}(n+1)$  est donc vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

4. La fonction  $h$  est continue et dérivable sur  $[1, 2]$  et pour tout  $x \in [1, 2]$ ,  $|h'(x)| \leq \frac{1}{e}$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [1, 2]$  et  $\alpha = h(\alpha) \in [1, 2]$ , ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|h(u_n) - h(\alpha)| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$$

soit

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|.$$

5. Montrons le résultat par récurrence et posons pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$  ».

**Initialisation** ( $n = 0$ )  $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq 1$  car  $\alpha \in [1, 2]$ . Ainsi :

$$|1 - \alpha| \leq \frac{1}{e^0}$$

et  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hérédité** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie et montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. On a d'après la question précédente :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$$

or par hypothèse de récurrence  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$ , ainsi :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^n}$$

soit

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e^{n+1}}$$

$\mathcal{P}(n+1)$  est donc vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

6. On a d'après ce qui précède :

$$0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$$

or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$ , ainsi d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

soit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc vers  $\alpha$ .

## Exercice 3

1. Les applications  $\sin$  et  $\cos$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in ]0, \pi[$ ,  $\sin(x) \neq 0$  donc l'application  $\cot$  est dérivable sur  $]0, \pi[$  en tant que quotient d'applications dérivables sur  $]0, \pi[$  dont le dénominateur ne s'annule pas. Et l'on a, pour tout  $x \in ]0, \pi[$ ,

$$\cot'(x) = \frac{\sin(x) \cos'(x) - \sin'(x) \cos(x)}{(\sin(x))^2} = \frac{-(\sin(x))^2 - (\cos(x))^2}{(\sin(x))^2} = -1 - (\cot(x))^2.$$

2. Pour tout  $x \in ]0, \pi[$ ,  $\cot'(x) < 0$ . Ainsi  $\cot$  est strictement décroissante sur  $]0, \pi[$ . De plus  $\cot$  est continue sur  $]0, \pi[$  car elle y est dérivable. Ainsi d'après le théorème de la bijection  $\cot$  réalise une bijection de  $]0, \pi[$  dans  $\cot(]0, \pi[)$ . Et

$$\cot(]0, \pi[) = ] \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cot(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot(x)[ = ] -\infty, +\infty[ = \mathbb{R}.$$

Donc l'application  $\cot$  réalise bien une bijection de  $]0, \pi[$  dans  $\mathbb{R}$ .

3. (a) On calcule

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1.$$

Ainsi par définition d'une application réciproque

$$g(0) = \frac{\pi}{2}, \quad g(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad g(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

- (b) D'après le théorème de la bijection  $g$  est strictement décroissante car elle est de même monotonie que  $\cot$ . De plus elle est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, \pi[$ . Comme elle est décroissante alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \pi.$$

4. L'application  $\cot$  est dérivable sur  $]0, \pi[$  et, pour tout  $x \in ]0, \pi[$ ,  $\cot'(x) < 0$  donc  $\cot'(x) \neq 0$ . Ainsi d'après le théorème de dérivation des applications réciproques, l'application  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g'(x) = \frac{1}{\cot'(g(x))} = \frac{1}{-1 - \cot(g(x))^2} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

5. (a) On remarque que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = -\arctan'(x)$ .

Donc il existe un réel  $\alpha$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = -\arctan(x) + \alpha$ .

- (b) On a donc en particulier

$$g(0) = -\arctan(0) + \alpha \quad \text{i.e.} \quad \frac{\pi}{2} = -0 + \alpha$$

On peut donc conclure que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ .

6. (a) L'application  $x \mapsto \frac{x^2 - 1}{2x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  en tant que quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  alors par composition  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . La fonction  $h$  est de la forme  $g \circ u$  donc pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x) \times g'(u(x)) \\ &= \frac{2x(2x) - 2(x^2 - 1)}{4x^2} \times g'\left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right) \\ &= \frac{2x^2 + 2}{4x^2} \times \left(-\frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2}\right) \\ &= -\frac{2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \\ &= -\frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{2}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

On a donc pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $h'(x) = 2g'(x)$ .

- (b) Comme  $h' = 2g'$  alors il existe un réel  $\alpha$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $h(x) = 2g(x) + \alpha$ .  
En particulier  $h(1) = 2g(1) + \alpha$  i.e.  $g(0) = 2g(1) + \alpha$  et donc

$$\alpha = g(0) - 2g(1) = \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} = 0.$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $h(x) = 2g(x)$ .

De même il existe un réel  $\beta$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_-^*$ ,  $h(x) = 2g(x) + \beta$ .

En particulier  $h(-1) = 2g(-1) + \beta$  i.e.  $g(0) = 2g(-1) + \beta$  et donc

$$\beta = g(0) - 2g(-1) = \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{3\pi}{4} = -\pi.$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}_-^*$ ,  $h(x) = 2g(x) - \pi$ .