Corrigé du DM n° 7

Exercice 1 *ESCP Europe 2018, Voie T*

1. (a) On calcule l'intégrale I_0 à l'aide des primitives usuelles :

$$I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}.$$

(b) On remarque d'abord qu'on a bien $I_0 \geqslant 0$. Puis on pose $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \geqslant 1$, $\ln t \geqslant 0$ donc pour $t \in [1;\mathrm{e}]$, $\ln t \geqslant 0$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1;\mathrm{e}]$, $(\ln t)^n \geqslant 0$. Comme pour $t \in [1;\mathrm{e}]$, $t \geqslant 0$, on a également pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1;\mathrm{e}]$, $t(\ln t)^n \geqslant 0$. Ainsi par croissance de l'intégrale, comme $1 \leqslant \mathrm{e}$, on obtient que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} t(\ln t)^n \mathrm{d}t \geqslant 0.$$

(c) Pour étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$, étudions le signe de $I_{n+1} - I_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_1^{\mathrm{e}} t(\ln t)^{n+1}\mathrm{d}t - \int_1^{\mathrm{e}} t(\ln t)^n\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} t(\ln t)^{n+1} - t(\ln t)^n\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} t(\ln t)^n(\ln t - 1)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Nous savons que pour $t \in [1;\mathrm{e}]$, $t(\ln t)^n \geqslant 0$. Etudions le signe de $\ln t - 1$. On a :

$$\ln t - 1 \geqslant 0 \iff \ln t \geqslant 1 \iff t \geqslant \mathrm{e}^1.$$

Ainsi pour $t \in [1;\mathrm{e}]$, $\ln t - 1 \leqslant 0$. Ceci conduit donc pour $t \in [1;\mathrm{e}]$ à $t(\ln t)^n(\ln t - 1) \leqslant 0$. On conclut par croissance de l'intégrale, comme $1 \leqslant \mathrm{e}$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{\mathrm{e}} t(\ln t)^n(\ln t - 1)\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Ainsi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée par 0 (car $I_n \geqslant 0$ d'après la question précédente), on en déduit d'après le théorème de convergence monotone que la suite $(I_n)_n$ est convergente.

2. (a) La fonction f_n est dérivable sur $[1;\mathrm{e}]$ comme produit de fonctions dérivables, on a pour $t \in [1;\mathrm{e}]$,

$$f_n'(t) = (n+1)\frac{1}{t}(\ln t)^{n+1-1} = \frac{(n+1)(\ln t)^n}{t}.$$

(b) $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t(\ln t)^{n+1}\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} tf_n(t)\mathrm{d}t.$
Comme à la question précédente, on nous a fait calculer $f_n'(t)$, cela nous invite à poser :
Posons $\begin{cases} u'(t) = t \\ v(t) = f_n(t) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v'(t) = \dfrac{(n+1)(\ln t)^n}{t} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;\mathrm{e}]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^2}{2}(\ln t)^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t^2}{2}\frac{(n+1)(\ln t)^n}{t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} t(\ln t)^n\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n.
\end{aligned}$$

On obtient alors quasiment la relation voulue :

$$I_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n. \iff 2I_{n+1} = \mathrm{e}^2 - (n+1)I_n \iff 2I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}^2.$$

(c) A l'aide de cette relation, on peut exprimer I_{n+1} en fonction de I_n :

$$I_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n.$$

En prenant $n=0$, on obtient :

$$I_1 = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}I_0 = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{e}^2-1}{2} = \frac{2\mathrm{e}^2-(\mathrm{e}^2-1)}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

(d) Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après la question 1.(c), la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante donc $I_{n+1}\leqslant I_n$ donc

$$2I_{n+1} + (n+1)I_n \leqslant (n+3)I_n.$$

Or $2I_{n+1}+(n+1)I_n = \mathrm{e}^2$ donc $\mathrm{e}^2 \leqslant (n+3)I_n$, on obtient alors la première inégalité :

$$\frac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leqslant I_n.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la question 1.(c), la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante donc $I_{n-1}\geqslant I_n$ donc $nI_{n-1}\geqslant nI_n$ et donc

$$2I_n + nI_{n-1} \geqslant (n+2)I_n.$$

Or $2I_n + (n-1)I_n = \mathrm{e}^2$ donc $\mathrm{e}^2 \geqslant (n+2)I_n$, on obtient alors la deuxième inégalité :

$$I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+2}.$$

L'inégalité reste vraie pour $n=0$ car d'après la question 1.(a), on a $I_0 = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$.
Finalement, on obtient bien l'encadrement souhaité valable pour $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+2}.$$

(e) D'après la question précédente, pour $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+2}.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^2}{n+3} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^2}{n+2} = 0$$

donc par théorème d'encadrement, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$. En multipliant, l'encadrement précédent par $n\in\mathbb{N}$, on obtient :

$$\frac{n\mathrm{e}^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{n\mathrm{e}^2}{n+2}.$$

Calculons les limites des deux termes extrémaux. Il s'agit, a priori, de formes indéterminées. Factorisons par le terme prépondérant, on obtient :

$$\frac{n\mathrm{e}^2}{n+3} = \frac{\mathrm{e}^2}{1+\frac{3}{n}} \quad \text{et} \quad \frac{n\mathrm{e}^2}{n+2} = \frac{\mathrm{e}^2}{1+\frac{2}{n}}$$

Sous cette forme, on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\mathrm{e}^2}{n+3} = \mathrm{e}^2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n\mathrm{e}^2}{n+2} = \mathrm{e}^2.$$

Ainsi, on peut conclure par théorème d'encadrement que la suite $(nI_n)_n$ converge et que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} nI_n = \mathrm{e}^2.}$

(f) D'après la relation $(*)$, on sait que :

$$I_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

```python
def calcul_integrale(n):
    I=(np.exp(2)-1)/2
    for k in range(1,n+1):
        I=np.exp(2)/2-k*I/2
    return(I)
```

3. (a) D'après la question 2.(d), on sait que :

$$\frac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+2} \quad (1)$$

donc on a aussi

$$\frac{\mathrm{e}^2}{n+4} \leqslant I_{n+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+3}$$

et donc

$$\frac{2\mathrm{e}^2}{n+4} \leqslant 2I_{n+1} \leqslant \frac{2\mathrm{e}^2}{n+3} \quad (2)$$

En additionnant membre à membre les encadrements (2) et (1), on obtient :

$$\frac{2\mathrm{e}^2}{n+4} + \frac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leqslant 2I_{n+1} + I_n \leqslant \frac{2\mathrm{e}^2}{n+3} + \frac{\mathrm{e}^2}{n+2},$$

or, en mettant au même dénominateur, on a :

$$\frac{2\mathrm{e}^2}{n+3} + \frac{\mathrm{e}^2}{n+2} = \frac{2(n+2)\mathrm{e}^2 + (n+3)\mathrm{e}^2}{(n+3)(n+2)} = \frac{\mathrm{e}^2(3n+7)}{(n+2)(n+3)}$$

De la même manière,

$$\frac{2\mathrm{e}^2}{n+4} + \frac{\mathrm{e}^2}{n+3} = \frac{\mathrm{e}^2(3n+10)}{(n+3)(n+4)}.$$

D'où le résultat souhaité :

$$\frac{\mathrm{e}^2(3n+10)}{(n+3)(n+4)} \leqslant 2I_{n+1} + I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2(3n+7)}{(n+2)(n+3)}.$$

(b) On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_n &= n(\mathrm{e}^2 - nI_n) \\ &= n(2I_{n+1} + (n+1)I_n - nI_n) \quad \text{d'après } * \\ &= n(2I_{n+1} + I_n). \end{aligned}$$

On remarque que l'on peut écrire : $w_n = nI_n + 2(n+1)I_{n+1} - 2I_{n+1}$.
Or on a montré à la question 2.(d) que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = \mathrm{e}^2$ donc $\lim_{n\to+\infty} (n+1)I_{n+1} = \mathrm{e}^2$. On a également montré que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$. Ainsi par opérations sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}^2 - 0 = 3\mathrm{e}^2.$$

Autre méthode : Trouver un encadrement de w_n.

Or la question 3.(a) nous fournit un encadrement de $2I_{n+1}+I_n$, on en déduit donc un encadrement de $n(2I_{n+1}+I_n)$, on a alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n\mathrm{e}^2(3n+10)}{(n+3)(n+4)} \leqslant n(2I_{n+1}+I_n) \leqslant \frac{n\mathrm{e}^2(3n+7)}{(n+2)(n+3)},$$

ce qui donne :

$$\frac{n\mathrm{e}^2(3n+10)}{(n+3)(n+4)} \leqslant w_n \leqslant \frac{n\mathrm{e}^2(3n+7)}{(n+2)(n+3)}.$$

Calculons alors la limite des termes extrémaux. Ce sont, a priori, des formes indéterminées, factorisons par le terme prépondérant. On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n\mathrm{e}^2(3n+10)}{(n+3)(n+4)} = \frac{n^2\left(\mathrm{e}^2\left(3+\frac{10}{n}\right)\right)}{n^2\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)\right)} = \frac{\mathrm{e}^2\left(3+\frac{10}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)}.$$

On en déduit alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\mathrm{e}^2(3n+10)}{(n+3)(n+4)} = 3\mathrm{e}^2.$$

On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n\mathrm{e}^2(3n+7)}{(n+2)(n+3)} = \frac{n^2\left(\mathrm{e}^2\left(3+\frac{7}{n}\right)\right)}{n^2\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\right)} = \frac{\mathrm{e}^2\left(3+\frac{7}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}.$$

On en déduit alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\mathrm{e}^2(3n+7)}{(n+2)(n+3)} = 3\mathrm{e}^2.$$

On conclut par théorème d'encadrement que la suite $(w_n)_n$ converge et que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = 3\mathrm{e}^2}$.

4. Montrons le résultat par récurrence.

   On pose $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $I_n = \dfrac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\left(\mathrm{e}^2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right)$. »

   Initialisation $(n=0)$ On sait, d'après la question 1.(a), que $I_0 = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. Or

$$\frac{(-1)^0 0!}{2^{0+1}}\left(\mathrm{e}^2\sum_{k=0}^{0}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1).$$

   Ainsi

$$I_0 = \frac{(-1)^0 0!}{2^{0+1}}\left(\mathrm{e}^2\sum_{k=0}^{0}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right).$$

   $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est initialisée.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'après la relation $(*)$, on sait que :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}\left(\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!} - 1\right)\right) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{e^2}{2} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!} - 1\right) \\
&= \frac{e^2}{2} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-2)^k}{k!} - e^2\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} - 1\right) \\
&= \frac{e^2}{2} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-2)^k}{k!} - 1\right) - \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}} \times e^2\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{e^2}{2} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-2)^k}{k!} - 1\right) - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}\times 2} \times e^2(-1)^{n+1}\times 2^{n+1} \\
&= \frac{e^2}{2} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-2)^k}{k!} - 1\right) - \frac{e^2}{2} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-2)^k}{k!} - 1\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!} - 1\right).$$

Exercice 2

1. Soit $n \geqslant 3$. On note g_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g_n(x) = x^{n-1} - 1$. La fonction g_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme fonction polynomiale. Pour tout $x \geqslant 0$,

$$g_n'(x) = (n-1)x^{n-2}.$$

Donc pour tout $x \geqslant 0$, $g_n'(x) > 0$ et $g_n'(0) = 0$ donc la fonction g_n est donc strictement croissante sur $[0,+\infty[$. De plus, $g_n(1) = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in]0,1[, \quad x^{n-1} - 1 < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geqslant 1, \quad x^{n-1} - 1 \geqslant 0.}$$

De plus, la fonction f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme fonction polynomiale. Pour tout $x \geqslant 0$,

$$f_n{}'(x) = nx^{n-1} - n = n\left(x^{n-1} - 1\right) = ng_n(x)$$

D'après le signe de la fonction g_n établi précédemment on en déduit que,
la fonction f_n est $\boxed{\text{strictement décroissante sur } [0,1[\text{ et strictement croissante sur }]1+\infty[.}$

2. La fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.
De plus, $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = 2 - n < 0$ car $n \geqslant 3$.
D'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc $\boxed{\text{une unique solution } \alpha_n \text{ sur }]0,1[}$.
La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
De plus, $f_n(1) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
D'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc $\boxed{\text{une unique solution } \beta_n \text{ sur }]1,+\infty[.}$.
En conclusion, l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions $\boxed{\alpha_n \text{ et } \beta_n \text{ telle que } 0 < \alpha_n < 1 < \beta_n}$.

3. (a) i. On peut proposer la fonction suivante :

```python
def f5(x):
    return x**5-5*x+1
```

ii. On peut proposer le programme suivant :

```python
def dichotomie(epsilon):
    a= 0
    b= 1
    while np.abs (b-a)>epsilon:
        c= (a+b)/2
        if f5(a) * f5(c)<0:
            b=c
        else:
            a=c
    return (a+b)/2
```

iii. L'instruction `dichotomie(0.01)` renvoie alors une valeur approchée de α_5 à 10^{-2} près.

(b) Soit $n \geqslant 3$ et soit $x \in]0,1[$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - (n+1)x - x^n + nx = x^n(x-1) - x.$$

Or $x \in]0,1[$ donc $x^n(x-1) < 0$ et $-x < 0$ donc $\boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0}$.

(c) Soit $n \geqslant 3$. En appliquant le résultat de la question précédente à $\alpha_n \in]0,1[$, on obtient

$$f_{n+1}(\alpha_n) - f_n(\alpha_n) = f_{n+1}(\alpha_n) < 0$$

D'où, $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ car $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$.
Or, la fonction f_{n+1} est strictement décroissante sur $]0,1[$, d'où $\boxed{\alpha_n > \alpha_{n+1}}$.
La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est donc $\boxed{\text{décroissante}}$.

(d) De plus, pour tout $n \geqslant 3$, $\alpha_n \in]0,1[$. La suite $(\alpha_n)_n$ est donc décroissante et minorée par 0. Par conséquent, elle $\boxed{\text{converge vers un réel } \ell_1 \in [0,1]}$.
En outre, par décroissance de la suite, pour tout $n \geqslant 3$, $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_3 < 1$. Donc pour tout $n \geqslant 3$, $0 \leqslant (\alpha_n)^n \leqslant {\alpha_3}^n$.
Et comme $\alpha_3 \in]0,1[$, par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0.}$

(e) Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell_1 > 0$. Alors, $n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or pour tout $n \geqslant 3$,

$$n\alpha_n = \alpha_n^n + 1$$

Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n + 1 = 1$. Comme $n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, c'est absurde. Par conséquent, la suite (α_n) $\boxed{\text{converge vers } 0}$.

(f) D'après ce qui précède, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} {\alpha_n}^n = 0$.

4. (a) Soit $n \geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) - n &= \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n - n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) + 1 - n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{(\sqrt{n})^k} - n - 2\sqrt{n} + 1 - n \\
&= 1 + n\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{4}{n} - 2n - 2\sqrt{n} + 1 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{(\sqrt{n})^k} \\
&= 2 + 2\sqrt{n} + 2n - 2 - 2n - 2\sqrt{n} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{(\sqrt{n})^k} \\
&= \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{(\sqrt{n})^k} > 0
\end{aligned}$$

car $n \geqslant 3$. On a donc bien $\forall n \geqslant 3$, $\boxed{f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqslant n}$.

(b) Soit $n \geqslant 3$, On a $\beta_n \in]1,+\infty[$ et $f_n(1) < f_n(\beta_n) = 0 \leqslant n \leqslant f_n\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$. La fonction f_n étant strictement croissante sur $]1,+\infty[$, on en déduit que

$$\forall n \geqslant 3, \quad 1 \leqslant \beta_n \leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 1$, par théorème d'encadrement, on en déduit que la suite (β_n) $\boxed{\text{converge vers 1}}$.

Exercice 3 *Ecricome 2015, voie E*

1. Si l'événement C_1 est réalisé, on effectue les tirages dans l'urne U_1 qui contient une boule noire. On note B_i l'évènement "on tire une boule blanche au i-ème tirage" et N_i l'évènement "on tire une boule noire au i-ème tirage". On a alors

$$\begin{aligned} P_{C_1}(Y=j) &= P_{C_1}\left(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{j-1} \cap N_j\right) \\ &= P_{C_1}(B_1) \times P_{C_1\cap B_1}(B_2) \times \ldots \times P_{C_1\cap B_1 \cap \ldots \cap B_{j-1}}(N_j) \\ &= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \ldots \times \frac{N-j+1}{N-j+2} \times \frac{1}{N-j+1} \end{aligned}$$

Après simplification on a bien,

$$\boxed{P_{C_1}(Y=j) = \frac{1}{N}.}$$

2. Lorsqu'on effectue des tirages dans l'urne U_2 qui ne contient que des boules blanches, on est sûr d'être dans l'urne U_2 que lorsque toutes les boules ont été tirées. Ainsi,

$$\boxed{P_{C_2}(Y=j) = 0 \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant N-1}$$

et

$$\boxed{P_{C_2}(Y=N) = 1}$$

3. (C_2, C_1) forme un système complet d'événement donc à l'aide de la formule des probabilités totales,

$$P(Y=j) = P_{C_1}(Y=j)P(C_1) + P_{C_2}(Y=j)P(C_2).$$

- Si $1 \leqslant j \leqslant N$, $P(Y=j) = P_{C_1}(Y=j)P(C_1) + 0 = \dfrac{1}{N} \times \dfrac{1}{2}$
- Si $j = N$, $P(Y=j) = \dfrac{1}{N} \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{2}$

$$\boxed{\text{Ainsi,} \quad P(Y=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si} \quad j \in [\![1, N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si} \quad j = N \end{cases}}$$

4. On a :

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{N} jP(Y=j) = \sum_{j=1}^{N-1} jP(Y=j) + NP(Y=N)$$

D'où

$$E(Y) = \frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N-1} j + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} = \frac{(N-1)N}{2} \times \frac{1}{2N} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} = \frac{N-1}{4} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2}$$

Et donc

$$\boxed{E(Y) = \frac{3N+1}{4}}$$