Devoir maison n° 7

Ce devoir maison est composé de trois exercices : deux obligatoires et un facultatif. Bon courage !

Exercice 1

1. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leur domaine de définition et déterminer leur dérivée :
   (a) $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
   (b) $g(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2\,(1-e^x)}{e^x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
   (c) $h(x) = \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$
2. Dériver les fonctions suivantes sans justifier leur dérivabilité.
   (a) $f_1(x) = \ln\left(\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{4+x^3}}\right)$
   (b) $f_2(x) = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}$

Exercice 2

Partie I - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x} - 1$ et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Établir que $\mathcal{C}$ admet une droite asymptote $\mathcal{D}$ au voisinage de $+\infty$ et préciser une équation de $\mathcal{D}$.
2. Étudier le sens de variation de f et dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée α.
   (b) Justifier que $\alpha \in [1, 2]$.
   On pourra utiliser les valeurs approchées : $\mathrm{e}^{-1} \approx 0,4$ *et* $\mathrm{e}^{-2} \approx 0,1$.
4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ en y faisant figurer le réel α.
   On pourra utiliser la valeur approchée : $\alpha \approx 1,3$.

Partie II - Approximation de α

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1$.
On définit également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet comme unique solution sur $\mathbb{R}$ le réel α défini en 3).
2. Montrer que, pour tout $x \in [1, 2]$, $\quad |h'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   On pourra utiliser les valeurs approchées : $h(1) \approx 1,4$ *et* $h(2) \approx 1,1$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}\,|u_n - \alpha|$.

5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$.
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 3 *FACULTATIF*

On définit l'application cotangente notée $\cot :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in]0,\pi[$, $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Justifier que l'application $\cot$ est dérivable sur $]0,\pi[$ puis vérifier que
$$\forall x \in]0,\pi\,[, \quad \cot'(x) = -1 - (\cot(x))^2.$$
2. Montrer que l'application $\cot$ réalise une bijection de $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$.
3. On note g la bijection réciproque de $\cot$, on a donc $g : \mathbb{R} \to]0,\pi[$.
   (a) Déterminer $g(0), g(1)$ et $g(-1)$.
   (b) Donner le sens de variation de g et les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
4. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. (a) Justifier qu'il existe un réel α tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = -\arctan(x) + \alpha$.
   (b) Déterminer la valeur de α.
6. On définit l'application $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h(x) = g\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$.
   (a) Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   (b) Donner une expression simplifier de h en fonction de g sur les intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.