Devoir maison n° 7

Ce devoir maison est composée de deux exercices obligatoires et d'un troisième facultatif.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on pose $I_0 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t \,\mathrm{d}t$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t(\ln t)^n \,\mathrm{d}t$.

1. (a) Calculer I_0.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n \geqslant 0$.
   (c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.
2. (a) Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur $[1;\mathrm{e}]$ par :
   $$\forall t \in [1;\mathrm{e}], \quad f_n(t) = (\ln t)^{n+1}.$$
   On note f_n' la dérivée de f_n. Pour tout $t \in [1;\mathrm{e}]$, calculer $f_n'(t)$.
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, établir que pour tout entier naturel n, la relation $(*)$ suivante :
   $$2I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}^2 \qquad (*)$$
   (c) En déduire la valeur de I_1.
   (d) En utilisant la relation $(*)$ et la décroissance de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$, établir pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant :
   $$\frac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+2}.$$
   (e) En déduire les limites respectives des deux suites $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(nI_n)_{n\geqslant 0}$.
   (f) Utiliser la relation $(*)$ pour compléter la fonction Python suivante qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la valeur de I_n.

```python
def calcul_integrale(....):
    I=.....
    for k in range(.......):
        I=........................
    return .......
```

3. (a) Etablir, pour tout entier naturel n, l'encadrement :
   $$\frac{(3n+10)\mathrm{e}^2}{(n+3)(n+4)} \leqslant 2I_{n+1} + I_n \leqslant \frac{(3n+7)\mathrm{e}^2}{(n+2)(n+3)}.$$
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose : $w_n = n(\mathrm{e}^2 - nI_n)$. Montrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty} w_n = 3\mathrm{e}^2.$$
4. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, l'égalité :
   $$I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \left(\mathrm{e}^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right).$$

Exercice 2

On considère $n \geqslant 3$. Soit f_n l'application définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Étudier le signe de la fonction $x \mapsto x^{n-1} - 1$ sur $[0,+\infty[$. En déduire le sens de variation de f_n sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions α_n et β_n telle que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
3. **Étude de la suite** $(\alpha_n)_{n>3}$
   (a) *Étude informatique dans le cas particulier* $n = 5$
      i. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie $f_5(x)$.

```
def f5(x) :
    return ......................
```

      ii. Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie une valeur approchée de α_5 à ε près en utilisant l'algorithme de dichotomie.

```
def dichotomie(epsilon):
    a = ............
    b = ...........
    while np.abs (b-a)>epsilon:
        c = ..............
        if f5(a) * f5(c)<0:
            ..................
        else:
            ...................
    return (a+b) / 2
```

      iii. Quelle instruction faut-il saisir dans la console afin d'afficher une valeur approchée de α_5 à 10^{-2} près ?

   (b) Soit $n \geqslant 3$. Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ et déterminer le signe de cette expression sur $]0,1[$.
   (c) En appliquant le résultat de la question précédente au réel α_n, déterminer le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
   (d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$.
   (e) En raisonnant par l'absurde, montrer que la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ vaut 0 .
   (f) Montrer que $n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
4. **Étude de suite** $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$.
   (a) Soit $n \geqslant 3$. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) - n = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{(\sqrt{n})^k}$$

   En déduire que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqslant n.$$

   (b) En déduire, à l'aide du sens de variation de la fonction f_n, un encadrement de β_n et sa limite ℓ.

Exercice 3 *FACULTATIF*

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire et l'urne U_2 contient N boules blanches.

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- C_1 l'événement " on choisit l'urne U_1 ".
- C_2 l'événement " on choisit l'urne U_2 ".

1. Montrer que pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$: $\quad P_{C_1}(Y = j) = \dfrac{1}{N}$.
2. Calculer $P_{C_2}(Y = j)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$. *On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leqslant j \leqslant N-1$.*
3. Montrer que :
$$P(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1, N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$
4. Calculer l'espérance de Y.