

Corrigé du DM n° 6

Exercice 1

- F est clairement inclus dans l'ensemble des suites réelles.
 - Tous les termes de la suite nulle sont nuls donc ils vérifient trivialement la relation $u_{n+3} = -u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite nulle est donc dans F et $F \neq \emptyset$.
 - Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux éléments de F et soit λ un réel. Montrons que la suite $(z_n)_n = (\lambda u_n + v_n)_n$ est dans F . On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} z_{n+3} &= \lambda u_{n+3} + v_{n+3} \\ &= \lambda(-u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n) + (-v_{n+2} + 4v_{n+1} + 4v_n) \text{ car } ((u_n)_n, (v_n)_n) \in F^2 \\ &= -(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + 4(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + 4(\lambda u_n + v_n) \\ &= -z_{n+2} + 4z_{n+1} + 4z_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(z_n)_{n \geq 0} = (\lambda u_n + v_n)_{n \geq 0}$ est dans F .

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

- Montrons que $x = (x_n)_{n \geq 0} = ((-1)^n)_{n \geq 0}$ vérifie la relation de récurrence définissant F . On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} -x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n &= -(-1)^{n+2} + 4(-1)^{n+1} + 4(-1)^n \\ &= (-1)^n(-(-1)^2 + 4(-1) + 4) \\ &= (-1)^n(-1 - 4 + 4) \\ &= (-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{n+3} \\ &= x_{n+3}. \end{aligned}$$

Donc $x \in F$. De même, on montre que $y = (y_n)_{n \geq 0} = ((-2)^n)_{n \geq 0}$ vérifie la relation de récurrence définissant F , on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} -y_{n+2} + 4y_{n+1} + 4y_n &= -(-2)^{n+2} + 4(-2)^{n+1} + 4(-2)^n \\ &= (-2)^n(-4 - 8 + 4) \\ &= (-2)^n(-8) \\ &= (-2)^{n+3} \\ &= y_{n+3}. \end{aligned}$$

Donc $y \in F$. De même, on montre que $z = (z_n)_{n \geq 0} = (2^n)_{n \geq 0}$ vérifie la relation de récurrence définissant F , on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} -z_{n+2} + 4z_{n+1} + 4z_n &= -2^{n+2} + 4 \times 2^{n+1} + 4 \times 2^n \\ &= 2^n(-4 + 8 + 4) \\ &= 2^n \times 8 \\ &= 2^{n+3} \\ &= z_{n+3} \end{aligned}$$

Donc $z \in F$.

- On en déduit $\text{Vect}(x, y, z) \subset F$.
- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$. (ici 0 désigne la suite nulle). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_1(-1)^n + \lambda_2(-2)^n + \lambda_3 2^n = 0.$$

Avec $n = 0, n = 1$ et $n = 2$, cela nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On obtient par la méthode du pivot de Gauss que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc la famille (x, y, z) est bien libre.

5. On va raisonner par récurrence triple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{A}(n)$: « $u_n = 0$. »

Initialisation Comme $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ alors $\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(1)$ et $\mathcal{A}(2)$ sont vraies.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{A}(n), \mathcal{A}(n+1)$ et $\mathcal{A}(n+2)$ sont vraies. Alors comme $(u_n)_{n \geq 0}$ appartient à F ,

$$u_{n+3} = -u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = -0 + 4 \times 0 + 4 \times 0 = 0$$

Donc $\mathcal{A}(n+3)$ est vraie.

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 0$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien la suite nulle.

6. (a) On cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = u_0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = u_1 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = u_2 \end{cases}$$

Par la méthode du pivot de Gauss, on obtient

$$\lambda_1 = \frac{4u_0}{3} - \frac{u_2}{3}, \quad \lambda_2 = -\frac{u_0}{2} - \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4}, \quad \lambda_3 = \frac{u_0}{6} + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{12}$$

- (b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n + \lambda_3 z_n$$

où le triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ a été défini à la question précédente. Comme $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire de la famille (x, y, z) alors $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$. De plus $w_0 = u_0, w_1 = u_1$ et $w_2 = u_2$ d'après la question précédente. Soit maintenant une suite $(u_n)_{n \geq 0} \in F$ dont les trois premiers termes sont u_0, u_1 et u_2 . Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n - w_n.$$

La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ appartient à F car F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De plus $v_0 = v_1 = v_2 = 0$. Donc d'après la question 5. $(v_n)_{n \geq 0}$ est la suite nulle. Ainsi les deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ sont égales et on a montré l'unicité de la suite de F dont les trois premiers termes sont u_0, u_1 et u_2 .

7. On sait déjà que $\text{Vect}(x, y, z) \subset F$. Soit maintenant $(u_n)_{n \geq 0} \in F$. Ses trois premiers termes sont u_0, u_1 et u_2 . Donc d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n + \lambda_3 z_n$$

où le triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ a été trouvé à la question 6.(a). Donc $(u_n)_{n \geq 0} \in \text{Vect}(x, y, z)$. Ainsi $F \subset \text{Vect}(x, y, z)$ et donc $F = \text{Vect}(x, y, z)$. La famille (x, y, z) est donc génératrice de F , et libre d'après la question 3. Donc (x, y, z) est une base de F .

Exercice 2

1. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M \in F &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } M = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff M \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &\text{Donc } F = \text{Vect}(I_3, A, B) \text{ ou l'on a posé } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, F est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (I_3, A, B) , c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
De plus, nous avons montré que la famille (I_2, A, B) est génératrice de F . Montrons qu'elle est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 I_2 + \lambda_2 A + \lambda_3 B = 0_3.$$

On a alors, en particulier, en lisant les 3 coefficients de la première ligne : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc la famille est libre.
Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et (I_3, A, B) en est une base.

2. (a) Soit $M \in F$. On sait qu'alors, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Ainsi,

$${}^t M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = M(a, c, b) \in F.$$

Conclusion : F est stable par transposition.

(b) i. Soit $(M, M') \in F^2$. Alors, $\exists (a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{R}^6$ tel que $M = M(a, b, c)$ et $M' = M(a', b', c')$. Puis,

$$M \times M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' + cb' & ab' + ba' + cc' & ac' + bb' + ca' \\ ca' + ac' + bb' & cb' + aa' + bc' & cc' + ab' + ba' \\ ba' + cc' + ab' & bb' + ca' + ac' & bc' + cb' + aa' \end{pmatrix}$$

Donc $MM' = M(aa' + bc' + cb', ab' + ba' + cc', ac' + ca' + bb')$ et $MM' \in F$.

Conclusion : F est stable par produit.

ii. Raisonnons par récurrence. Soit $M \in F$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(k)$: « $M^k \in F$ ».

Initialisation Pour $k = 0$, on a $M^0 = I_3 = M(1, 0, 0) \in F$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. On a alors :

$$M^{k+1} = M^k \times M \in F$$

car d'après l'hypothèse de récurrence, $M^k \in F$ et d'après la question précédente, F est stable par produit.

Conclusion D'après le principe de récurrence, on a montré que : si $M \in F$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.

3. (a) On a :

- $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ espace vectoriel de référence.
- $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ car ${}^t 0_3 = 0_3$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})^2$. On a, d'après le cours sur les matrices :

$${}^t (\lambda S_1 + S_2) = \lambda {}^t S_1 + {}^t S_2 = \lambda S_1 + S_2$$

car S_1 et S_2 sont symétriques. Ainsi, $\lambda S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Conclusion : $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Puis :

- $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ espace vectoriel de référence.
- $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ car ${}^t 0_3 = 0_3 = -0_3$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(A_1, A_2) \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})^2$. On a, d'après le cours sur les matrices :

$${}^t (\lambda A_1 + A_2) = \lambda {}^t A_1 + {}^t A_2 = \lambda (-A_1) - A_2 = -(\lambda A_1 + A_2)$$

car A_1 et A_2 sont antisymétriques. Ainsi, $\lambda A_1 + A_2 \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Conclusion : $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M \in F \cap \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } M = M(a, b, c) \text{ et } {}^t M = M \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } M = M(a, b, c) = M(a, c, b) \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } M = M(a, b, c) \text{ et } b = c \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } M = M(a, b, b) \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } M = aI_2 + b(A + B). \end{aligned}$$

Ainsi, $F \cap \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (on le savait déjà puisque que c'est une intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) et $(I_2, A + B)$ en est une famille génératrice. Cette famille étant composée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre et forme donc une base.

Conclusion : $(I_2, A + B)$ est une base de $F \cap \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

De la même manière, soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M \in F \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } M = M(a, b, c) \text{ et } {}^tM = -M \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } M = M(a, b, c) = -M(a, c, b) \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } M = M(a, b, c) \text{ et } a = 0, b = -c \\ &\iff \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.q. } M = M(0, b, -b) \\ &\iff \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.q. } M = b(A - B) \end{aligned}$$

Ainsi, $F \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (on le savait déjà puisque que c'est une intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) et $(A - B)$ en est une famille génératrice. Cette famille étant composée d'un unique vecteur non nul, elle est libre et forme donc une base.

Conclusion : $(A - B)$ est une base de $F \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3

1. Dans cette question, on effectue une seule fois l'épreuve $\mathcal{E}$.

- (a) Notons P_i l'événement « faire pile ». Dans la question, on nous demande donc de calculer $P(P_i \cap B_1)$ puisque si on a tiré la boule blanche de U_1 , on l'a remise dans U_2 .

On calcule cette quantité à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(P_i \cap B_1) &= P(P_i) \times P_{P_i}(B_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- (b) Les résultats possibles de l'épreuve $\mathcal{E}$ sont :

- Faire pile et tirer une boule blanche soit $P_i \cap B_1$
- Faire pile et tirer une boule noire soit $P_i \cap A_1$
- Faire face et tirer une boule blanche soit $\emptyset$ car la boule blanche ne se trouve que dans l'urne U_1 au début de l'expérience
- Faire face et tirer une boule noire soit $\overline{P_i} \cap A_1$

- (c) En appliquant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{P_i, \overline{P_i}\}$, on a

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(P_i \cap A_1) + P(\overline{P_i} \cap A_1) \\ &= P(P_i)P_{P_i}(A_1) + P(\overline{P_i})P_{\overline{P_i}}(A_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Ainsi $P(A_1) = \frac{5}{6}$ et on en déduit que : $P(B_1) = 1 - P(A_1) = \frac{1}{6}$.

2. On répète maintenant l'épreuve $\mathcal{E}$.

- (a) Si l'on sait que la boule blanche est dans l'urne U_1 , on se trouve dans la même situation qu'au premier tirage. Ainsi,

$$\forall n \geq 0, \quad P_{A_n}(A_{n+1}) = P(A_1) = \frac{5}{6} \quad \text{et} \quad P_{A_n}(B_{n+1}) = P(B_1) = \frac{1}{6}.$$

- (b) On se place dans le cas où la boule blanche est dans l'urne U_2 à la n -ème expérience. En appliquant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{P_i, \overline{P_i}\}$, on a

$$\begin{aligned} P_{B_n}(A_{n+1}) &= P_{B_n}(P_i \cap A_{n+1}) + P_{B_n}(\overline{P_i} \cap A_{n+1}) \\ &= P_{B_n}(P_i) \times P_{B_n \cap P_i}(A_{n+1}) + P_{B_n}(\overline{P_i}) \times P_{B_n \cap \overline{P_i}}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ainsi $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{6}$ et en déduit que : $P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{5}{6}$.

- (c) On notera $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$. Les événements $\{A_n, B_n\}$ forment un système complet d'événements. En utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{5}{6} + b_n \times \frac{1}{6} \\ a_{n+1} &= \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{6} + b_n \times \frac{5}{6} \\ b_{n+1} &= \frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n \end{aligned}$$

En conclusion, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n$.

- (d) $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'événements, donc $P(A_n) + P(B_n) = a_n + b_n = 1$.

Soit $n \geq 0$, on a

$$a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}(1 - a_n) = \frac{4}{6}a_n + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}.$$

En faisant un calcul du même type pour b_n , on a :

$$b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n = \frac{1}{6}(1 - b_n) + \frac{5}{6}b_n = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}.$$

Finalement,

$$\forall n \geq 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6} \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6} \end{cases}$$

- (e) On a deux suites arithmético-géométriques ayant pour termes initiaux $a_1 = \frac{5}{6}$ et $b_1 = \frac{1}{6}$. On résout l'équation

$$x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \iff \frac{1}{3}x = \frac{1}{6} \iff x = \frac{1}{2}$$

On pose la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = a_n - \frac{1}{2}$. On vérifie que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(a_n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3}u_n \end{aligned}$$

De plus $u_1 = a_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. On a alors $u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ et finalement

$$a_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}.$$

Enfin, $b_n = 1 - a_n$ donc

$$b_n = -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 4

1. Lors de la première partie, il mise sur un seul numéro. Donc $p_1 = \frac{1}{12}$.

$\{A_1, \overline{A_1}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_2 &= P(A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(A_2) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{3}{12} + \frac{11}{12} \times \frac{2}{12} \\ &= \frac{3}{144} + \frac{22}{144} \\ &= \frac{25}{144} \end{aligned}$$

On a donc $p_2 = \frac{25}{144}$.

2. (a) Si le joueur gagne la n -ème partie il mise sur 3 numéros donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Sinon, il mise sur 2 numéros donc $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{6}$.

$\{A_n, \overline{A_n}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)p_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}$.

- (b) Tout d'abord, résolvons l'équation

$$x = \frac{1}{12}x + \frac{1}{6} \iff \frac{11}{12}x = \frac{1}{6} \iff x = \frac{2}{11}.$$

On définit alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \frac{2}{11}$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{11} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6} - \frac{2}{11} = \frac{1}{12} \left(u_n + \frac{2}{11}\right) - \frac{1}{66} = \frac{1}{12}u_n$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{12}$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} u_1.$$

De plus, $u_1 = p_1 - \frac{2}{11}$ et $p_1 = P(A_1) = \frac{1}{12}$ et $p_n = u_n + \frac{2}{11}$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{11}\right) + \frac{2}{11} = \frac{2}{11} - \frac{13}{132} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.$$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{p_n = \frac{2}{11} - \frac{13}{132} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}}.$

3. (a) On a : $B_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A_i}\right) \cap A_n$ et $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A_i}\right) > 0$ (pour avoir le droit d'utiliser la formule qui suit) donc, d'après la formule des probabilités composées,

$$P(B_n) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \dots P_{\bigcap_{i=1}^{n-2} \overline{A_i}}(\overline{A_{n-1}})P_{\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A_i}}(A_n)$$

De plus, la façon de jouer ne dépend que du résultat précédent donc

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \dots P_{\overline{A_{n-2}}}(\overline{A_{n-1}})P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) \\ &= P(\overline{A_1}) \left(\prod_{k=1}^{n-2} P_{\overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}}) \right) P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) \\ &= \frac{11}{12} \left(\prod_{k=1}^{n-2} \frac{5}{6} \right) \frac{1}{6} \end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{P(B_n) = \frac{11}{72} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}.$

- (b) On a $B_1 = A_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^n \overline{A_i}\right)$. De plus, $P\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n-1} \overline{A_i}\right)\right) > 0$ (pour avoir le droit d'utiliser la formule qui suit) donc, d'après la formule des probabilités composées et en reprenant l'idée du raisonnement précédent, on a :

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(A_1)P_{A_1}(\overline{A_2})P_{A_1 \cap \overline{A_2}}(\overline{A_3}) \dots P_{A_1 \cap (\bigcap_{i=2}^{n-1} \overline{A_i})}(\overline{A_n}) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(\overline{A_2})P_{\overline{A_2}}(\overline{A_3}) \dots P_{\overline{A_{n-1}}}(\overline{A_n}) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{P(B_1) = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}.$

- (c) Soit $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$. On a $B_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i}\right) \cap A_k \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^n \overline{A_i}\right)$.

On a $P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i}\right) \cap A_k \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n-1} \overline{A_i}\right)\right) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées et en reprenant les raisonnements précédents, on a :

$$\begin{aligned} P(B_k) &= P(\overline{A_1}) \left(\prod_{i=1}^{k-2} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_{i+1}}) \right) P_{\overline{A_{k-1}}}(A_k)P_{A_k}(\overline{A_{k+1}}) \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_{i+1}}) \right) \\ &= \frac{11}{12} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1} \end{aligned}$$

On a donc $\forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \quad \boxed{P(B_k) = \frac{11}{96} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}}.$

(d) $C_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$ et les B_k sont deux à deux incompatibles donc

$$\begin{aligned} P(C_n) &= \sum_{k=1}^n P(B_k) = P(B_1) + \sum_{k=2}^{n-1} P(B_k) + P(B_n) \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{11}{96} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \frac{11}{72} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{1}{16} + \frac{11}{72}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + (n-2) \frac{11}{96} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{P(C_n) = \frac{31}{144} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + (n-2) \frac{11}{96} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}}.$