Corrigé du DM n° 6

Exercice 1

Partie I

1. F est le sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_2 et v_3. Ainsi, c'est un $\boxed{\text{espace vectoriel}}$.
Par ailleurs, on remarque que $v_1 = 2v_2 - v_3$. Ainsi, $F = \mathrm{Vect}\,(v_2, v_3)$. La famille (v_2, v_3) est donc $\boxed{\text{génératrice de } F}$.
On vérifie qu'elle est libre (par la définition ou en précisant qu'elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires). Il s'agit donc d'une $\boxed{\text{base de } F}$.
Conclusion : F est un espace vectoriel et (v_2, v_3) en est une base.
2. On a :

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + z - 2t = 0 \text{ et } x = z + t\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, z + t - y + z - 2t = 0 \text{ et } x = z + t\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, y = 2z - t \text{ et } x = z + t\} \\ &= \{(z+t, 2z-t, z, t) \,|\, (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{z(1,2,1,0) + t(1,-1,0,1) \,|\, (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,2,1,0),(1,-1,0,1)). \end{aligned}$$

Ainsi, $G = \mathrm{Vect}((1,2,1,0),(1,-1,0,1))$ donc G est un $\boxed{\text{espace vectoriel}}$ et $((1,2,1,0),(1,-1,0,1))$ est une $\boxed{\text{famille génératrice}}$ de G. Comme cette famille est constituée de deux vecteurs non colinéaires, elle est $\boxed{\text{libre}}$.
Conclusion : G est un espace vectoriel dont une base est $((1,2,1,0),(1,-1,0,1))$.
3. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t) \in F \cap G \iff \begin{cases} \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / (x,y,z,t) & = av_2 + bv_3 = (2a+3b, a+3b, -2b, a+b) \\ x - y + z - 2t & = 0 \\ x - z - t & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / (x,y,z,t) & = (2a+3b, a+3b, -2b, a+b) \\ (2a+3b) - (a+3b) + (-2b) - 2(a+b) & = 0 \\ (2a+3b) - (-2b) - (a+b) & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / (x,y,z,t) & = (2a+3b, a+3b, -2b, a+b) \\ a & = -4b \end{cases}$$

$$\iff \exists b \in \mathbb{R} / (x,y,z,t) = (-4b)v_2 + bv_3 = b\,(-4v_2 + v_3)$$

$$\iff (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}\,(-4v_2 + v_3)$$

Ainsi, $F \cap G = \mathrm{Vect}\,(-4v_2 + v_3)$ (c'est donc un espace vectoriel !) et $-4v_2 + v_3 = (-5,-1,-2,-3)$ est un vecteur non nul qui en forme une famille génératrice, c'en est donc une base.
Conclusion : $(-5,-1,-2,-3)$ forme une $\boxed{\text{base de } F \cap G}$.

Partie II

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :
   - $E_k \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de référence.
   - $0_3 \in E_k \text{ car } A^k 0_3 = 0_3 = A^{k-1}0_3$.
   - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M,N) \in E_k^2$. On a, en utilisant les propriétés de distributivité dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et le fait que M et N soient des éléments de E_k :
   $$A^k(\lambda M + N) = \lambda A^k M + A^k N = \lambda A^{k-1}M + A^{k-1}N = A^{k-1}(\lambda M + N)$$
   Ainsi, $\lambda M + N \in E_k$.

   Conclusion : E_k est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

2. (a) On a $E_1 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = M\}$.

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

$$M \in E_1 \iff \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a &= d \\ e &= b \\ c &= f \\ g &= d \\ h &= e \\ f &= i \\ g &= 0 \\ h &= 0 \\ i &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 0 \\ e &= 0 \\ f &= 0 \\ g &= 0 \\ h &= 0 \\ i &= 0 \end{cases}.$$

Conclusion : $\boxed{E_1 = \{0_3\}}$.

(b) $E_2 = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A^2M = AM\right\}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$M \in E_2 \iff \begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} g &= d \\ h &= e \\ i &= f \\ g &= 0 \\ h &= 0 \\ i &= 0 \end{cases} \iff d = e = f = g = h = i = 0 \text{ et } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} M \in E_2 &\iff M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Donc, $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Les trois matrices précédentes forment donc une $\boxed{\text{famille génératrice}}$ de E_2.

Montrons que cette famille est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille est donc $\boxed{\text{libre}}$. Elle constitue une $\boxed{\text{base de } E_2}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in E_k$. On a alors $A^k M = A^{k-1}M$. Ainsi,

$$A^{k+1}M = \left(AA^k\right) M = A\left(A^k M\right) = A\left(A^{k-1}M\right) = \left(AA^{k-1}\right) M = A^k M$$

où l'on a utilisé plusieurs fois l'associativité du produit matriciel. Donc $M \in E_{k+1}$.
Conclusion : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{E_k \subset E_{k+1}}$.

4. Supposons que A soit inversible. Montrons que $E_{k+1} \subset E_k$. Soit $M \in E_{k+1}$. On a donc $A^{k+1}M = A^k M$. Comme A est inversible, elle admet une matrice inverse A^{-1}. En multipliant par cette inverse à gauche dans l'égalité précédente, il vient :

$$A^{-1}\left(A^{k+1}M\right) = A^{-1}\left(A^k M\right)$$

Et donc, en utilisant l'associativité du produit matriciel,

$$\left(A^{-1}A^{k+1}\right) M = \left(A^{-1}A\right) A^k M = A^k M \quad \text{et} \quad A^{-1}\left(A^k M\right) = \left(A^{-1}A\right) A^{k-1}M = A^{k-1}M$$

d'où $A^k M = A^{k-1}M$ et donc $M \in E_k$. Donc $E_{k+1} \subset E_k$. Et comme d'après la question précédente, $E_k \subset E_{k+1}$, on peut conclure.
Conclusion : Si A est inversible, alors $\boxed{E_k = E_{k+1}}$.

Partie III

1. (a) i. Soit $q \neq 1$, soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
(1-q)\sum_{k=1}^{n-1} kq^k &= \sum_{k=1}^{n-1} kq^k - \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} kq^k - \sum_{i=2}^{n}(i-1)q^i \quad \text{en posant dans la deuxième somme } i = k+1 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} kq^k - \sum_{i=2}^{n} iq^i + \sum_{i=2}^{n} q^i \\
&= q + \sum_{k=2}^{n-1} kq^k - \sum_{i=2}^{n-1} iq^i - nq^n + q^2\frac{1-q^{n-2+1}}{1-q} \\
&= q - nq^n + q^2\frac{1-q^{n-2+1}}{1-q}
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $q \neq 1$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} kq^k = \frac{q}{1-q} - n\frac{q^n}{1-q} + q^2\frac{1-q^{n-2+1}}{(1-q)^2}.}$$

ii. En utilisant la question précédente avec $q = \dfrac{1}{2} \neq 1$, il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 1 - n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= 1 - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= 2 - 2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

(b) Redémontrons cette égalité par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2-2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation Pour $n = 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = 0 \quad \text{et} \quad 2-2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a alors, on utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k + n\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= 2-2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= 2+\left(\frac{1}{2}\right)^n(-2(n+1)+n)\\ &= 2+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\times 2(-2(n+1)+n)\\ &= 2-2(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On a :
   - $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
   - $0_{\mathbb{R}^N} \in F \,\mathrm{car}\, 4\times 0 = 8\times 0 - 5\times 0 + 0$.
   - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et, $(u,v) \in \mathbb{R}\times F^2$, montrons que $\lambda u + v \in F$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}4(u+\lambda v)_{n+3} &= 4u_{n+3} + \lambda 4u_{n+3}\\ &= 8u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n + \lambda\left(8v_{n+2} - 5v_{n+1} + v_n\right) \qquad \text{car } (u,v)\in F^2\\ &= 8\left(u_{n+2}+\lambda v_{n+2}\right) - 5\left(u_{n+1}+\lambda v_{n+1}\right) + \left(u_n + \lambda v_n\right)\\ &= 8(u+\lambda v)_{n+2} - 5(u+\lambda v)_{n+1} + (u+\lambda v)_n\end{aligned}$$

   On a donc $u + \lambda v \in F$.

Conclusion : F est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

Montrons que $a \in F$. Rappelons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 1 \text{ et } 4 = 8-5+1$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $4a_{n+3} = 8a_{n+2} - 5a_{n+1} + a_n$, donc $\boxed{a \in F}$.

De même montrons que $b \in F$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - 20\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, 4b_{n+3} = 8b_{n+2} - 5b_{n+1} + b_n$, donc $\boxed{b \in F}$.

Enfin, montrons que $c \in F$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}8(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - 5(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} &= 16n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 32\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - 20n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - 20\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 8n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\\ &= 4(n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}.\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4c_{n+3} = 8c_{n+2} - 5c_{n+1} + c_n$, donc $\boxed{c \in F}$.

3. Montrons que la famille (a,b,c) est une famille libre de F.

   Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c=0$. On a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}, \lambda_1+\lambda_2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\lambda_3 n\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

   Méthode 1 : prendre successivement $n=0, n=1$ et $n=2$ pour avoir un système que l'on résout, on trouve que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

   Méthode 2 : $\frac{1}{2}\in\left]-1,1\right[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ et par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lambda_1+\lambda_2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\lambda_3 n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\lambda_1$ et on obtient $\lambda_1=0$.

   On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\lambda_3 n\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$. En prenant $n=0$, on obtient $\lambda_2=0$.

   D'où pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_3 n\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ et on obtient $\lambda_3=0$.

   Conclusion : La famille (a,b,c) est $\boxed{\text{libre}}$.

4. (a) i. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$4v_{n+1}-v_n=4\left(u_{n+2}-u_{n+1}\right)-u_{n+1}+u_n=4u_{n+2}-5u_{n+1}+u_n.$$

Or $u\in F$ donc $4u_{n+3}=8u_{n+2}-5u_{n+1}+u_n$. Ainsi :

$$4u_{n+2}-5u_{n+1}+u_n=8u_{n+2}-5u_{n+1}+u_n-4u_{n+2}=4u_{n+3}-4u_{n+2}=4v_{n+2}.$$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}, 4v_{n+2}=4v_{n+1}-v_n$, donc $\boxed{v\in G}$.

ii. L'ensemble G est l'ensemble des suites vérifiant la relation linéaire de récurrence d'ordre 2 :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 4v_{n+2}=4v_{n+1}-v_n.$$

On résout l'équation caractéristique associée à cette relation :

$$4r^2=4r-1\iff 4r^2-4r+1=0\iff 4\left(r-\frac{1}{2}\right)^2=0\iff r=\frac{1}{2}.$$

Ainis, d'après le cours, on a donc :

$$v\in G\iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\quad|\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=\lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n+\mu n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Conclusion : v est combinaison linéaire de b et c.

iii. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En sommant pour $k=0$ à $n-1$ la relation $(*)$, on a par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1}v_k=\sum_{k=0}^{n-1}u_{k+1}-u_k=u_n-u_0$$

Donc $\boxed{u_n=u_0+\sum_{k=0}^{n-1}v_k}$.

Montrons maintenant que u est combinaison linéaire des suites a,b et c.

On a montré que pour tout entier n non nul, $u_n=u_0+\sum\limits_{k=0}^{n-1}v_k$ et qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que pour tout entier n, $v_n=\lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n+\mu n\left(\frac{1}{2}\right)^n$. On a donc, par linéarité de la somme :

$$u_n=u_0+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\lambda\left(\frac{1}{2}\right)^k+\mu k\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)=u_0+\lambda\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\mu\sum_{k=0}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Ainsi, en utilisant la question préliminaire pour tout entier n non nul,

$$u_n=u_0+\lambda\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}+\mu\left(2-2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right),$$

donc

$$u_n = u_0 + 2\lambda - 2\lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\mu - 2\mu(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Cette formule reste valable pour $n = 0$.
Conclusion : $\boxed{u = (u_0 + 2\lambda + 2\mu)\,a - (2\lambda + 2\mu)b - 2\mu c}$, la suite u est donc bien combinaison linéaire de a, b et c.

(b) On a bien montré que la famille (a, b, c) est aussi une famille génératrice de F. Elle forme donc une $\boxed{\text{base de } F}$.

Exercice 2

1. Dans cette question, on effectue une seule fois l'épreuve $\mathcal{E}$.

(a) Notons Pi l'événement « faire pile ». Dans la question, on nous demande donc de calculer $P(Pi \cap B_1)$ puisque si on a tiré la boule blanche de U_1, on l'a remise dans U_2.
On calcule cette quantité à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(Pi \cap B_1) &= P(Pi) \times P_{Pi}(B_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(b) Les résultats possibles de l'épreuve $\mathcal{E}$ sont :
- Faire pile et tirer une boule blanche soit $Pi \cap B_1$
- Faire pile et tirer une boule noire soit $Pi \cap A_1$
- Faire face et tirer une boule blanche soit $\emptyset$ car la boule blanche ne se trouve que dans l'urne U_1 au début de l'expérience
- Faire face et tirer une boule noire soit $\overline{Pi} \cap A_1$

(c) En appliquant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{Pi, \overline{Pi}\}$, on a

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(Pi \cap A_1) + P(\overline{Pi} \cap A_1) \\ &= P(Pi)P_{Pi}(A_1) + P(\overline{Pi})P_{\overline{Pi}}(A_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P(A_1) = \frac{5}{6}}$ et on en déduit que : $\boxed{P(B_1) = 1 - P(A_1) = \frac{1}{6}}$.

2. On répète maintenant l'épreuve $\mathcal{E}$.

(a) Si l'on sait que la boule blanche est dans l'urne U_1, on se trouve dans la même situation qu'au premier tirage. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad P_{A_n}(A_{n+1}) = P(A_1) = \frac{5}{6} \quad \text{et} \quad P_{A_n}(B_{n+1}) = P(B_1) = \frac{1}{6}.}$$

(b) On se place dans le cas où la boule blanche est dans l'urne U_2 à la n-ème expérience. En appliquant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{Pi, \overline{Pi}\}$, on a

$$\begin{aligned} P_{B_n}(A_{n+1}) &= P_{B_n}(Pi \cap A_{n+1}) + P_{B_n}(\overline{Pi} \cap A_{n+1}) \\ &= P_{B_n}(Pi) \times P_{B_n \cap Pi}(A_{n+1}) + P_{B_n}(\overline{Pi}) \times P_{B_n \cap \overline{Pi}}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{6}}$ et en déduit que : $\boxed{P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{5}{6}}$.

(c) On notera $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$. Les évènements $\{A_n, B_n\}$ forment un système complet d'événements. En utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{5}{6} + b_n \times \frac{1}{6} \\ a_{n+1} &= \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{6} + b_n \times \frac{5}{6} \\ b_{n+1} &= \frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n \end{aligned}$$

En conclusion, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n}$ et $\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n}$.

(d) $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'événements, donc $\boxed{P(A_n) + P(B_n) = a_n + b_n = 1}$.
Soit $n \geqslant 0$, on a

$$a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}(1 - a_n) = \frac{4}{6}a_n + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}.$$

En faisant un calcul du même type pour b_n, on a :

$$b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n = \frac{1}{6}(1 - b_n) + \frac{5}{6}b_n = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6} \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6} \end{cases}}$$

(e) On a deux suites arithmético-géométriques ayant pour termes initiaux $a_1 = \frac{5}{6}$ et $b_1 = \frac{1}{6}$. On résout l'équation

$$x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \iff \quad \frac{1}{3}x = \frac{1}{6} \iff \quad x = \frac{1}{2}$$

On pose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = a_n - \frac{1}{2}$. On vérifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{2} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(a_n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3}u_n \end{aligned}$$

De plus $u_1 = a_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. On a alors $u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ et finalement

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}.}$$

Enfin, $b_n = 1 - a_n$ donc

$$\boxed{b_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}.}$$

Exercice 3

1. Lors de la première partie, il mise sur un seul numéro. Donc $\boxed{p_1 = \frac{1}{12}}$.
   $\{A_1, \overline{A_1}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned} p_2 = P(A_2) &= P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(A_2) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{3}{12} + \frac{11}{12} \times \frac{2}{12} \\ &= \frac{3}{144} + \frac{22}{144} \\ &= \frac{25}{144} \end{aligned}$$
   On a donc $\boxed{p_2 = \frac{25}{144}}$.

2. (a) Si le joueur gagne la n-ème partie il mise sur 3 numéros donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Sinon, il mise sur 2 numéros donc $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{6}.}$
   $\{A_n, \overline{A_n}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{6}(1-p_n) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)p_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$
   On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}}$.

   (b) Tout d'abord, résolvons l'équation
$$x = \frac{1}{12}x + \frac{1}{6} \iff \frac{11}{12}x = \frac{1}{6} \iff x = \frac{2}{11}.$$
   On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \frac{2}{11}$.
   On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{11} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6} - \frac{2}{11} = \frac{1}{12}\left(u_n + \frac{2}{11}\right) - \frac{1}{66} = \frac{1}{12}u_n$$
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{12}$. On a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} u_1.$$
   De plus, $u_1 = p_1 - \frac{2}{11}$ et $p_1 = P(A_1) = \frac{1}{12}$ et $p_n = u_n + \frac{2}{11}$ d'où
$$\forall \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{12} - \frac{2}{11}\right) + \frac{2}{11} = \frac{2}{11} - \frac{13}{132}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.$$
   En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{p_n = \frac{2}{11} - \frac{13}{132}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}}$.

3. (a) On a : $B_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A_i}\right) \bigcap A_n$ et $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A_i}\right) > 0$ (pour avoir le droit d'utiliser la formule qui suit) donc, d'après la formule des probabilités composées,

$$P(B_n) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\dots P_{\bigcap_{i=1}^{n-2}\overline{A_i}}(\overline{A_{n-1}})P_{\bigcap_{i=1}^{n-1}\overline{A_i}}(A_n)$$

De plus, la façon de jouer ne dépend que du résultat précédent donc

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\dots P_{\overline{A_{n-2}}}(\overline{A_{n-1}})P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) \\ &= P(\overline{A_1})\left(\prod_{k=1}^{n-2} P_{\overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}})\right)P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) \\ &= \frac{11}{12}\left(\prod_{k=1}^{n-2}\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6} \end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{P(B_n) = \frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}.}$

(b) On a $B_1 = A_1 \bigcap \left(\bigcap_{i=2}^{n} \overline{A_i}\right)$. De plus, $P\left(A_1 \bigcap \left(\bigcap_{i=2}^{n-1} \overline{A_i}\right)\right) > 0$ (pour avoir le droit d'utiliser la formule qui suit) donc, d'après la formule des probabilités composées et en reprenant l'idée du raisonnement précédent, on a :

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(A_1)P_{A_1}(\overline{A_2})P_{A_1\bigcap\overline{A_2}}(\overline{A_3})\dots P_{A_1\bigcap(\bigcap_{i=2}^{n-1}\overline{A_i})}(\overline{A_n}) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(\overline{A_2})P_{\overline{A_2}}(\overline{A_3})\dots P_{\overline{A_{n-1}}}(\overline{A_n}) \\ &= \frac{1}{12}\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{P(B_1) = \frac{1}{16}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}$.

(c) Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$. On a $B_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i}\right) \bigcap A_k \bigcap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \overline{A_i}\right)$.

On a $P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i}\right) \bigcap A_k \bigcap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n-1} \overline{A_i}\right)\right) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées et en reprenant les raisonnements précédents, on a :

$$\begin{aligned} P(B_k) &= P(\overline{A_1})\left(\prod_{i=1}^{k-2} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_{i+1}})\right)P_{\overline{A_{k-1}}}(A_k)P_{A_k}(\overline{A_{k+1}})\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_{i+1}})\right) \\ &= \frac{11}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1} \end{aligned}$$

On a donc $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $\boxed{P(B_k) = \frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}}$.

(d) $C_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ et les B_k sont deux à deux incompatibles donc

$$\begin{aligned} P(C_n) &= \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = P(B_1) + \sum_{k=2}^{n-1} P(B_k) + P(B_n) \\ &= \frac{1}{16}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{1}{16}+\frac{11}{72}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + (n-2)\frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{P(C_n) = \frac{31}{144}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + (n-2)\frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}}$.

Exercice 4

Partie I.

1. Comme les événements sont indépendants, on a :

$$P(G_1 \cap G_2) = P(G_1)P(G_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

La probabilité que le lion ait mangé deux gazelles est de $\boxed{\frac{4}{9}}$.

2. On cherche à calculer la quantité $P(Z_1 \cap G_2 \cap G_3)$, comme les événements sont indépendants, on a :

$$P(Z_1 \cap G_2 \cap G_3) = P(Z_1)P(G_2)P(G_3) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

La probabilité que le lion ait mangé un zèbre et deux gazelles est de $\boxed{\frac{4}{27}}$.

3. On a :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(Z_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4) + P(G_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4) \\ &= P(Z_1)P(Z_2)P(G_3)P(G_4) + P(G_1)P(Z_2)P(G_3)P(G_4) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{8}{27} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{4+8}{81} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

Partie II.

1. On a $u_2 = \frac{4}{9}$ d'après la question 1. de la partie I.
   On a $u_3 = \frac{4}{27}$ d'après la question 2. de la partie I.
   On a $u_4 = \frac{4}{27}$ d'après la question 3. de la partie I.

2. Le terme $P_{Z_1}(J_{n+2})$ correspond à la probabilité de manger deux gazelle à la suite pour la première fois aux $n+1$-ème et $n+2$-ème repas en ayant commencé par manger un zèbre au repas numéro 1. Cela revient exactement à déterminer la probabilité qu'à partir du jour 1 le lion ait mangé pour la première fois deux gazelles de suite aux n-ème et $n+1$-ème repas soit u_{n+1}.
   Le terme $P_{G_1 \cap Z_2}(J_{n+2})$ correspond à la probabilité de manger deux gazelle à la suite pour la première fois aux $n+1$-ème et $n+2$-ème repas en ayant commencé par manger une gazelle et un zèbre aux repas numéro 1 et 2. Au troisième repas, on se retrouve comme à la configuration précédente (avec un zèbre en repas 1) et donc cela correspond la probabilité qu'à partir du jour 1 le lion ait mangé pour la première fois deux gazelles de suite aux $n-1$-ème et n-ème repas soit u_n.
   On a $P_{G_1 \cap G_2}(J_{n+2}) = 0$ car si il commence par manger deux gazelles, ce n'est pas aux repas $n+1$ et $n+2$ qu'il mangera pour la première fois deux gazelles.

3. Les événements $\{Z_1, G_1 \cap Z_2, G_1 \cap G_2\}$ forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a d'après la formules des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_{n+2} = P(J_{n+2}) &= P(Z_1 \cap J_{n+2}) + P(G_1 \cap Z_2 \cap J_{n+2}) + P(G_1 \cap G_2 \cap J_{n+2}) \\ &= P(Z_1)P_{Z_1}(J_{n+2}) + P(G_1 \cap Z_2)P_{G_1 \cap Z_2}(J_{n+2}) + P(G_1 \cap G_2)P_{G_1 \cap G_2}(J_{n+2}) \\ &= \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n + 0 \end{aligned}$$

   On a donc bien démontré la relation attendue, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\boxed{u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n}$.
   Pour $n = 1$, on a : $u_3 = \frac{4}{27}$ et $\frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{9}u_1 = \frac{4}{27} + 0 = \frac{4}{27}$. Cette relation reste donc valable pour $n = 1$.

4. Il s'agit d'une suite récurrence linéaire d'ordre 2, on résout l'équation caractéristique associée : $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{2}{9} = 0$. On a deux racines : $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \lambda \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \mu \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

En utilisant les valeurs de u_1 et u_2 et en résolvant un système linéaire, on détermine les valeurs de λ et μ et on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n.}$$

5. Comme pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, les événements J_k sont disjoints, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} P(J_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} J_k\right)$$

L'événement $\bigcup_{k=1}^{n} J_k$ est "au cours des n repas, le lion mangera deux fois de suite une gazelle (au moins une fois)".

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a, en utilisant l'expression déterminée à la question 3.,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} \\ &= -\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \\ &= 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

Comme $-\frac{1}{3} \in]-1, 1[$ et $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$, on a $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 1}$.

L'événement "le lion mangera deux fois de suite une gazelle " est presque-sûr (RDV au chapitre 21).

7. (a) Posons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale et la fonction $x \mapsto \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme fraction rationnelle. Dérivons l'égalité précédente pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1}) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^n}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Appliquons la formule précédente pour $x = p \in]-1, 1[$ et on obtient la relation attendue.

(b) Comme $p \in]-1, 1[$, $\lim_{n\to+\infty} p^{n+1} = 0$ et par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} (n+1)p^n = 0$, on en déduit par opérations sur les limites que $\frac{1}{(1-p)^2} - \frac{(n+1)p^n}{1-x} - \frac{x^{p+1}}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-p)^2}$.

En conclusion, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2}}$.

8. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de la somme :

$$M_n = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

D'après ce qui précède cette suite converge et en utilisant la limite déterminée précédemment, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \frac{4}{3} \times \frac{-1}{3} \times \frac{1}{(1+\frac{1}{3})^2} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} = \frac{15}{4}.$$