

Devoir maison n° 6

Ce devoir maison est composé de deux exercices sur les espaces vectoriels et d'un exercice de probabilités **au choix** entre les exercices 3 et 4 (sachant que l'exercice 4 est plus difficile que l'exercice 3). Bon courage !

Exercice 1 *Obligatoire*

Soit F l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = -u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n.$$

Soient les trois suites $x = ((-1)^n)_{n \geq 0}$, $y = ((-2)^n)_{n \geq 0}$ et $z = (2^n)_{n \geq 0}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
2. Montrer que $x \in F$, $y \in F$ et $z \in F$.
3. En déduire la relation d'inclusion entre $\text{Vect}(x, y, z)$ et F .
4. Montrer que la famille (x, y, z) est une famille libre.
5. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de F dont les trois premiers termes sont nuls. Montrer par récurrence que $(u_n)_{n \geq 0}$ est la suite nulle.
6. Soit $(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$.
 - (a) Déterminer une combinaison linéaire des trois suites x, y et z dont les trois premiers termes sont u_0, u_1 et u_2 .
Autrement dit, déterminer $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z$ soit une suite dont les trois premiers termes sont u_0, u_1 et u_2 .
 - (b) En utilisant la question 5., montrer que cette combinaison linéaire est l'unique suite de F dont les trois premiers termes sont u_0, u_1 et u_2 .
7. En déduire que $F = \text{Vect}(x, y, z)$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 2 *Obligatoire*

Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

On note alors $F = \{M(a, b, c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

On rappelle que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F .
2. (a) Montrer que F est stable par transposition c'est-à-dire que : $\forall M \in F, {}^t M \in F$.
 - (b) i. Montrer que F est stable par produit c'est-à-dire que : $\forall (M, M') \in F^2, MM' \in F$.
ii. En déduire que, pour tout $M \in F$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
3. (a) Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - (b) Déterminer alors une base de $F \cap \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et une base de $F \cap \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Choix 1

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 ainsi que d'une pièce de monnaie non truquée.

Initialement, l'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires et l'urne U_2 contient deux boules noires.

On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ suivante :

- on lance la pièce
- si l'on obtient pile, on tire une boule de U_1 , sinon on tire une boule de U_2
- si la boule tirée est noire, elle est remise dans la même urne, sinon elle est remise dans l'autre urne.

Pour n entier naturel non nul, on désigne par A_n l'évènement

A_n : " la boule blanche se trouve dans l'urne U_1 à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ répétition de l'épreuve $\mathcal{E}$ "

et par B_n l'évènement

B_n : " la boule blanche se trouve dans l'urne U_2 à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ répétition de l'épreuve $\mathcal{E}$ "

1. Dans cette question, on effectue une seule fois l'épreuve $\mathcal{E}$.

- Calculer la probabilité de l'évènement : "la pièce a donné pile et on a tiré la boule blanche de U_1 ".
- Décrire les résultats possibles de l'épreuve $\mathcal{E}$.
- Calculer la probabilité des évènements A_1 et B_1

2. On répète maintenant l'épreuve $\mathcal{E}$.

- Vérifier que : $\forall n \geq 0, P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{5}{6}$ et $P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{6}$
- Calculer également $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{B_n}(B_{n+1})$
- On notera $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$. En déduire a_{n+1} puis b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
- Que vaut la somme $a_n + b_n$? En déduire que $\forall n \geq 0, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6} \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6} \end{cases}$
- Déterminer, en fonction de n , les expressions de a_n et b_n .

Exercice 4 Choix 2

On considère une roue de loterie composée de 12 secteurs, numérotés de 1 à 12. Un croupier fait tourner cette roue devant un repère et on considère qu'à chaque lancer, chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère.

Un joueur choisit à chaque partie un ou plusieurs numéros parmi les 12. Il est gagnant si l'un des numéros choisis apparaît à l'arrêt de la roue.

Le joueur adopte la tactique suivante :

- il mise sur un seul numéro lors de la première partie,
- s'il perd à la n -ème partie ($n \geq 1$), il mise sur 2 numéros à la partie suivante; s'il gagne à la n -ème partie, il mise sur 3 numéros à la partie suivante.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n la probabilité de l'évènement A_n : "le joueur gagne la n -ème partie".

1. Déterminer p_1 et p_2 .

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{A_n}(B_{n+1})$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}$.

(b) En déduire l'expression de p_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Dans cette question, on fixe $n \geq 2$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note B_k l'évènement : "le joueur gagne une seule fois lors de n -parties et cette victoire a lieu lors de la k -ème partie".

(a) Exprimer B_n à l'aide des évènements A_k et en déduire $P(B_n)$.

(b) Calculer $P(B_1)$.

(c) Calculer, pour tout $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $P(B_k)$.

(d) Soit C_n l'évènement : "le joueur gagne une seule fois au cours des n parties".

Exprimer C_n à l'aide des évènements B_k et en déduire $P(C_n)$.