Devoir maison n° 6

Ce devoir maison est composée de 2 exercices obligatoires :
- ⋆ l'exercice 1
- ⋆ l'exercice 2 **OU** l'exercice 3 (plus difficile)

Il y a également pour ceux et celles qui le souhaitent un exercice facultatif : l'exercice 4 (il est nettement plus difficile que les autres).

Exercice 1 *Etude de quelques espaces vectoriels*

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I : dans l'espace des quadruplets.

On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on considère les trois vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, -1, 2, 1), \quad v_2 = (2, 1, 0, 1), \quad v_3 = (3, 3, -2, 1)$$

On pose également $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - 2t = 0 \text{ et } x - z - t = 0\right\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel et en exhiber une base.
2. Montrer que G est un espace vectoriel et en exhiber une base.
3. Exhiber une base de $F \cap G$.

Partie II : dans l'espace des matrices.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $E_k = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A^k M = A^{k-1} M\right\}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, E_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Dans cette question uniquement, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer l'ensemble E_1.
   (b) Déterminer l'ensemble E_2 et en exhiber une base.
3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $E_k \subset E_{k+1}$.
4. Montrer que si A est inversible, alors $E_k = E_{k+1}$.

Partie III : dans l'espace des suites réelles.

1. *Question préliminaire* : On souhaite démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 - 2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   (a) **Méthode 1 :**
      i. Soit $q \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant apparaitre un télescopage, calculer $(1-q)\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kq^k$.
      ii. Conclure.
   (b) **Méthode 2 :** Retrouver le résultat par récurrence.

Les suites a, b et c sont des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 1 \quad ; \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad c_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

F et G sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définis par :

$$F = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+3} = 8u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n\} \text{ et } G = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n\}$$

2. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui contient les suites a, b et c.
3. Vérifier que la famille (a, b, c) est une famille libre de F.
4. Le but de cette question est de montrer que la famille (a, b, c) est une base de F.
   (a) Soit $u \in F$. On considère la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n \quad (*)$.
      i. Vérifier que $v \in G$.
      ii. En déduire que v est combinaison linéaire de b et c.
      iii. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de $u_0, v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}$. En déduire que u est combinaison linéaire des suites a, b et c.
      Indication : on pourra utiliser la question préliminaire.
   (b) Conclure.

Exercice 2

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 ainsi que d'une pièce de monnaie non truquée.
Initialement, l'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires et l'urne U_2 contient deux boules noires.
On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ suivante :
- on lance la pièce
- si l'on obtient pile, on tire une boule de U_1, sinon on tire une boule de U_2
- si la boule tirée est noire, elle est remise dans la même urne, sinon elle est remise dans l'autre urne.

Pour n entier naturel non nul, on désigne par A_n l'évènement

A_n : " la boule blanche se trouve dans l'urne U_1 **à l'issue** de la $n^{ième}$ répétition de l'épreuve $\mathcal{E}$ "

et par B_n l'événement

B_n : " la boule blanche se trouve dans l'urne U_2 **à l'issue** de la $n^{ième}$ répétition de l'épreuve $\mathcal{E}$ "

1. Dans cette question, on effectue une seule fois l'épreuve $\mathcal{E}$.
   (a) Calculer la probabilité de l'événement : "la pièce a donné pile et on a tiré la boule blanche de U_1".
   (b) Décrire les résultats possibles de l'épreuve $\mathcal{E}$.
   (c) Calculer la probabilité des événements A_1 et B_1
2. On répète maintenant l'épreuve $\mathcal{E}$.
   (a) Vérifier que : $\quad \forall n \geqslant 0, \quad P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{5}{6} \quad$ et $\quad P_{A_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{6}$
   (b) Calculer également $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{B_n}(B_{n+1})$
   (c) On notera $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$. En déduire a_{n+1} puis b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (d) Que vaut la somme $a_n + b_n$? En déduire que $\forall n \geqslant 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{6} \\ b_{n+1} = \dfrac{2}{3}b_n + \dfrac{1}{6} \end{cases}$
   (e) Déterminer, en fonction de n, les expressions de a_n et b_n.

Exercice 3

On considère une roue de loterie composée de 12 secteurs, numérotés de 1 à 12. Un croupier fait tourner cette roue devant un repère et on considère qu'à chaque lancer, chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère.
Un joueur choisit à chaque partie un ou plusieurs numéros parmi les 12. Il est gagnant si l'un des numéros choisis apparaît à l'arrêt de la roue.
Le joueur adopte la tactique suivante :

- il mise sur un seul numéro lors de la première partie,
- s'il perd à la n-ème partie ($n \geqslant 1$), il mise sur 2 numéros à la partie suivante ; s'il gagne à la n-ème partie, il mise sur 3 numéros à la partie suivante.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n la probabilité de l'événement A_n : "le joueur gagne la n-ème partie".

1. Déterminer p_1 et p_2.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ p_{n+1} = \dfrac{1}{12}p_n + \dfrac{1}{6}$.
   (b) En déduire l'expression de p_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Dans cette question, on fixe $n \geqslant 2$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note B_k l'événement : "le joueur gagne une seule fois lors de n-parties et cette victoire a lieu lors de la k-ème partie".
   (a) Exprimer B_n à l'aide des événements A_k et en déduire $P(B_n)$.
   (b) Calculer $P(B_1)$.
   (c) Calculer, pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, $P(B_k)$.
   (d) Soit C_n l'événement : "le joueur gagne une seule fois au cours des n parties".
   Exprimer C_n à l'aide des événements B_k et en déduire $P(C_n)$.

Exercice 4 *FACULTATIF*

Partie I.

Les lionnes chassent des gazelles et des zèbres, pour le lion. La population de gazelles et de zèbres est suffisamment importante pour que la proportion de chaque espèce reste stable malgré la chasse. La probabilité pour que les lionnes rapportent une gazelle est de $\dfrac{2}{3}$, la probabilité qu'elles rapportent un zèbre est de $\dfrac{1}{3}$. Les repas du lion ne sont composés que d'une gazelle ou que d'un zèbre à chaque repas. On suppose que la composition d'un repas est indépendante des repas précédents.

- On appelle G_i l'événement : "il a mangé une gazelle au i-ème repas observé".
- On appelle Z_i l'événement : "il a mangé un zèbre au i-ème repas observé".

1. Quelle est la probabilité pour que, lors des deux premiers repas observés, le lion ait mangé deux gazelles ?
2. Quelle est la probabilité pour que, lors des trois premiers repas, il ait mangé, dans cet ordre : un zèbre puis deux gazelles ?
3. Sur les quatre premiers repas observés, on considère l'événement : $E =$ "il a mangé une gazelle deux fois de suite, pour la première fois, aux troisième et quatrième repas". Calculer $P(E)$.

Partie II.

On observe le lion sur une assez longue période. Pour $n \geqslant 2$, on appelle J_n l'événement : $J_n =$ " il a mangé une gazelle deux fois de suite, pour la première fois, aux $(n-1)^{eme}$ et n^{eme} repas".
Par exemple, l'événement E décrit en première partie est l'événement J_4.
On note $u_n = P(J_n)$ pour tout $n \geqslant 2$, et on pose $u_1 = 0$.

1. En utilisant la première partie, précisez u_2, u_3 et u_4.
2. Soit un entier $n \geqslant 2$, expliquer pourquoi $P_{Z_1}(J_{n+2}) = u_{n+1}$ et $P_{G_1 \cap Z_2}(J_{n+2}) = u_n$. Que vaut $P_{G_1 \cap G_2}(J_{n+2})$?
3. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $u_{n+2} = \dfrac{1}{3}u_{n+1} + \dfrac{2}{9}u_n$.
   Vérifier que cette relation est encore vraie pour $n = 1$.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \geqslant 1$.
5. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Que représente S_n ? (ne serait-ce pas par hasard la probabilité d'un événement qu'on pourrait énoncer ?)

6. Calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Comment interpréter ce résultat ?
7. Soit p un réel appartenant à $]-1,1[$.
   (a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2} - \frac{(n+1)p^n}{1-p} - \frac{p^{n+1}}{(1-p)^2}$.
   (b) En déduire la valeur $\displaystyle\lim \sum_{k=1}^{n} kp^{k-1}$ (si toutefois cette limite existe...).
8. On pose la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k$. Montrer que cette suite converge et calculer sa limite. Comment interpréter ce résultat ?