

Corrigé du DM n° 5

Exercice 1

1. (a) D'après l'énoncé, il fait beau le jour 1. Ainsi, $(u_1 = 1)$.

(b) D'après l'énoncé, s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égale à $\frac{4}{5}$. Donc,

$$P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{4}{5}$$

Par ailleurs, s'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égale à $\frac{2}{5}$. Donc,

$$P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

2. (a) D'après la formule des probabilités totales et en utilisant le système complet d'événements $\{B_n, \overline{B_n}\}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \times P(\overline{B_n}) \\ &= \frac{4}{5} \times P(B_n) + \frac{3}{5} \times P(\overline{B_n}) \\ &= \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n \end{aligned}$$

(b) On sait que $v_n = P(\overline{B_n}) = 1 - P(B_n) = 1 - u_n$, donc,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n \\ &= \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}(1 - u_n) \\ &= \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{5}u_n \\ &= \frac{1}{5}u_n + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

(c) On peut écrire la fonction suivante :

```
1 def calculsuite( n ) :
2   u= 1
3   for k in range(1,n) :
4     u=(1/5)*u+3/5
5   return u
```

(d) La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique. On applique donc la méthode pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n . On a :

$$x = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \iff \frac{4}{5}x = \frac{3}{5} \iff x = \frac{3}{4}$$

On définit alors la suite (w_n) par $w_n = u_n - \frac{3}{4}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{5}u_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{5}u_n - \frac{3}{20} \\ &= \frac{1}{5}\left(u_n - \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{5}w_n \end{aligned}$$

Donc, (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$. Son premier terme est $w_1 = u_1 - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = w_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

Et donc, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = w_n + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}$$

(e) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ car $\frac{1}{5} \in]-1; 1[$. Donc, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{4}}$.

Cela signifie qu'au bout d'un temps suffisamment long, il fait beau environ trois jours sur quatre.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On procède comme à la question 2.(a) en appliquant à nouveau la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{B_n, \overline{B_n}\}$,

$$v_{n+1} = P(B_n) P_{B_n}(\overline{B_{n+1}}) + P(\overline{B_n}) P_{\overline{B_n}}(\overline{B_{n+1}}) = u_n \times \frac{1}{5} + v_n \times \frac{2}{5}$$

En effet, en raisonnant comme à la question 1.(b), on a :

$$P_{B_n}(\overline{B_{n+1}}) = 1 - P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n$ d'après la question 2.(a) et que $v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n$ d'après la question 3.(a). Ainsi :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} & v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n & \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Posons $K = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = X_n K$.

- (c) Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $X_{n+1} = X_n K$ » et démontrons la par récurrence.

Initialisation ($n = 1$) : La relation obtenue en 3.(b), $X_{n+1} = X_n K$ appliquée pour $n = 1$ donne $X_2 = X_1 K$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $X_{n+1} = X_n K$. De plus, d'après la question 3.(b), on a $X_{n+2} = X_{n+1} K$ donc en remplaçant, il vient :

$$X_{n+2} = X_{n+1} K = X_n K K = X_n K^2$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_{n+1} = X_1 K^n$$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $K^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. D'une part, d'après ce qui précède, on a :

$$X_{n+1} = X_1 K^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

D'autre part, d'après la question 2.(c), on a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} & v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} & 1 - u_{n+1} \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n \right)$$

Par identification, on obtient :

$$\boxed{a_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n}$$

Il reste à déterminer c_n et d_n . L'astuce est de considérer la matrice ligne X_{n+2} :

$$X_{n+2} = X_1 K^{n+1} = (X_1 K) K^n = X_2 K^n$$

Or, d'après la question 2.(b), on a $u_2 = \frac{4}{5}u_1 + \frac{3}{5}v_1 = \frac{4}{5}$ donc $v_2 = 1 - u_2 = \frac{1}{5}$. Par conséquent :

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} \right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} \right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}a_n + \frac{1}{5}c_n & \frac{4}{5}b_n + \frac{1}{5}d_n \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient :

$$\frac{4}{5}a_n + \frac{1}{5}c_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{4}{5}b_n + \frac{1}{5}d_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1}$$

Or :

$$\frac{4}{5}a_n = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^n = \frac{3}{5} + \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{4}{5}b_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^n = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1}$$

D'où :

$$\frac{1}{5}c_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} - \frac{3}{5} - \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} = \frac{3}{20} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1}$$

et

$$\frac{1}{5}d_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} - \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} = \frac{1}{20} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1}$$

En multipliant membre à membre par 5, il vient :

$$\boxed{c_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n \quad \text{et} \quad d_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n}$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad K^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n \end{pmatrix}$$

4. (a) On a $U_n = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$. D'après la formule des probabilités composées :

$$P(U_n) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \dots \times P_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n)$$

D'après l'énoncé, le temps qu'il fait un certain jour dépend uniquement du temps qu'il fait la veille donc :

$$P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = P_{B_2}(B_3)$$

$$\vdots$$

$$P_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n) = P_{B_{n-1}}(B_n)$$

Ainsi :

$$P(U_n) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_2}(B_3) \times \dots \times P_{B_{n-1}}(B_n) = 1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

En conclusion, $\boxed{P(U_n) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}}$.

- (b) $\overline{V_n}$ est donc l'événement « il fait beau au plus une fois lors des n premiers jours de la période considérée ». Puisqu'il fait beau le premier jour, $\overline{V_n}$ est l'événement « il fait beau le premier jour et mauvais tous les autres jours lors des n premiers jours de la période considérée ». Autrement dit :

$$\overline{V_n} = B_1 \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_n}$$

En utilisant les mêmes arguments que ceux de la question précédente, on obtient :

$$P(\overline{V_n}) = P(B_1) \times P_{B_1}(\overline{B_2}) \times P_{\overline{B_2}}(\overline{B_3}) \times \dots \times P_{\overline{B_{n-1}}}(\overline{B_n}) = 1 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}$$

Enfin, on a $P(V_n) = 1 - P(\overline{V_n})$. En conclusion : $\boxed{P(V_n) = 1 - \frac{1}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}}$.

Problème 1

Partie I

1. On a :

$$P(L) = 0.21, \quad P(H) = 0.34, \quad P(S) = 0.45, \quad P(J) = 0.45, \quad P_L(N) = 0.6, \quad P_L(J) = 0.4, \\ P_S(J) = 0.45, \quad P_S(N) = 0.55.$$

2. On cherche $P(L \cap J)$, d'après la formule des probabilités composées, on a :

$$P(L \cap J) = P(L)P_L(J) = 0.21 \times 0.4 = 0.084.$$

La probabilité que l'élève ait suivi la spécialité LLCE et ait offert un jeu de société est de 0.84.

3. (a) Les événements $\{H, S, L\}$ forme un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(N) = P(H)P_H(N) + P(S)P_S(N) + P(L)P_L(N) \\ 0.55 = 0.34x + 0.45 \times 0.55 + 0.21 \times 0.6 \\ 0.55 = 0.34x + 0.2475 + 0.126 \\ 0.55 = 0.34x + 0.3735$$

(b) On résout cette équation de degré 1 et on obtient $0.34x = 0.1765$ soit $x \simeq 0.52$.

4. On cherche $P_N(H)$. D'après la formule de Bayes, on a :

$$P_N(H) = \frac{P(H)P_H(N)}{P(N)} = \frac{0.34 \times 0.52}{0.55} \simeq 0.32.$$

La probabilité que l'élève ait suivi la spécialité HGGSP sachant qu'il a offert de la nourriture est de 0.32.

Partie 2

1. On a $\boxed{d_1 = 0}$ car une seule personne s'offre forcément son cadeau. Donc $\boxed{a_1 = 0}$.

On a $\boxed{d_2 = 1}$ car elles doivent s'échanger leur cadeau pour ne pas avoir le leur. Comme il y a deux configurations possibles pour offrir un cadeau et une seule où on ne reçoit pas son propre cadeau, on a $\boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$.

On a $\boxed{d_3 = 2}$ car soit $A- > B- > C- > A$ ou $A- > C- > B- > A$. Il y a 6 configurations possibles au total. En effet, A possède trois choix pour son cadeau et B deux choix et C un seul. Parmi ces configurations, seulement 2 permettent de ne pas recevoir son propre cadeau, on a donc $\boxed{a_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$.

2. Le nombre de configurations possibles d'échange de cadeaux est $n!$ car A_1 a n choix possibles, A_2 a $(n-1)$ choix, A_3 a $(n-2)$ choix et ... A_n n'a plus qu'un choix. De plus, il y a d_n configurations où personne ne reçoit son propre cadeau, ainsi

$$a_n = \frac{d_n}{n!}.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a :

$$u_{n+1} = d_{n+1} - (n+1)d_n \\ = n(d_n + d_{n-1}) - (n+1)d_n \\ = nd_n + nd_{n-1} - nd_n - d_n \\ = -(d_n - nd_{n-1}).$$

La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est donc géométrique de raison $q = -1$ et $u_2 = d_2 - d_1 = 1$.

(b) On en déduit l'expression de u_n . On a pour $n \geq 2$,

$$u_n = (-1)^{n-2} = (-1)^n \quad \text{car } (-1)^{-2} = 1.$$

Ainsi pour $n \geq 2$, $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$.

4. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n) : \ll d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} \gg$.

Initialisation ($n = 1$) On a $d_1 = 0$ et $\sum_{k=0}^1 (-1)^k \frac{1!}{k!} = \frac{1}{0!} + (-1) \frac{1!}{1!} = 1 - 1 = 0$. Ainsi

$$d_1 = \sum_{k=0}^1 (-1)^k \frac{1!}{k!}.$$

$\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'après la question précédente, on sait que pour $n \geq 2$, $d_n = n d_{n-1} + (-1)^n$. Or ici $n \geq 1$ donc $n+1 \geq 2$, ainsi :

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= (n+1)d_n + (-1)^{n+1} \\ &= (n+1) \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} + (-1)^{n+1} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+1)!}{k!} + (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{(n+1)!}{k!}. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, $d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$.

5. On sait que $a_n = \frac{d_n}{n!}$, on a donc pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}.$$