Corrigé du DM n° 5

Problème 1

Partie 1 : étude d'un phénomène aléatoire

1. A l'instant 0, le mobile se trouve sur le sommet 1, donc on a :

$$P(A_0^1) = 1 \quad \text{et} \quad P(A_0^2) = P(A_0^3) = P(A_0^4) = 0.$$

2. Comme à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1, il ne peut être sur le sommet 1 à l'instant 1 donc $\boxed{P(A_1^1) = 0}$. Il va ensuite sur l'un des trois autres sommets de manière équiprobable donc $\boxed{P(A_1^2) = P(A_1^3) = P(A_1^4) = \frac{1}{3}}$.

3. Montrons par récurrence le résultat. On note pour $n \geqslant 2$:

$$\mathcal{P}(n) : \text{ « } P(A_n^1) \neq 0, P(A_n^2) \neq 0, P(A_n^3) \neq 0, P(A_n^4) \neq 0. \text{ »}$$

Initialisation $(n = 2)$ On a admis dans l'énoncé que $P(A_2^1) = \frac{1}{3}$ et $P(A_2^2) = P(A_2^3) = P(A_2^4) = \frac{2}{9}$. Ainsi $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \geqslant 2$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $P(A_n^1) \neq 0$: le mobile peut donc se situer sur le sommet 1 à l'instant n. D'après l'énoncé, il pourra donc se situer sur l'un des sommets 2, 3 ou 4 à l'instant $n+1$. Ainsi $P(A_{n+1}^2)$, $P(A_{n+1}^3)$ et $P(A_{n+1}^4)$ sont différentes de 0.
Mais on suppose également que $P(A_n^2) \neq 0$: le mobile peut donc se situer sur le sommet 2 à l'instant n. D'après l'énoncé, il pourra donc se situer sur le sommet 1 à l'instant $n+1$, c'est à dire $P(A_{n+1}^1)$ est bien différente de 0.
$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 2$, $P(A_n^1)$, $P(A_n^2)$, $P(A_n^3)$ et $P(A_n^4)$ sont différentes de 0.

4. (a) Remarquons tout d'abord que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\{A_n^1, A_n^2, A_n^3, A_n^4\}$ forme un système complet d'événements. En effet, à l'instant n, le mobile est sur un des sommets du carré (et pas ailleurs) et ne peut pas être sur deux sommets en même temps.
Soit $n \geqslant 2$, nous allons utiliser la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements de probabilités non nulles : $\{A_n^1, A_n^2, A_n^3, A_n^4\}$. On a donc pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}^1) &= P(A_n^1 \cap A_{n+1}^1) + P(A_n^2 \cap A_{n+1}^1) + P(A_n^3 \cap A_{n+1}^1) + P(A_n^4 \cap A_{n+1}^1) \\ &= P(A_n^1)P_{A_n^1}(A_{n+1}^1) + P(A_n^2)P_{A_n^2}(A_{n+1}^1) + P(A_n^3)P_{A_n^3}(A_{n+1}^1) + P(A_n^4)P_{A_n^4}(A_{n+1}^1) \end{aligned}$$

D'après l'énoncé : $P_{A_n^1}(A_{n+1}^1) = 0$ et les autres probabilités valent $\frac{1}{3}$. Ainsi on a bien pour $n \geqslant 2$,

$$P(A_{n+1}^1) = \frac{1}{3}(P(A_n^2) + P(A_n^3) + P(A_n^4)).$$

(b) D'après la question 1., on a : $P(A_0^2) = P(A_0^3) = P(A_0^4) = 0$ et d'après la question 2., on a : $P(A_1^1) = 0$. La relation reste donc valable pour $n = 0$.
D'après la question 2., $\frac{1}{3}(P(A_1^2)+P(A_1^3)+P(A_1^4)) = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$. Or il est admis dans l'énoncé que $P(A_2^1) = \frac{1}{3}$.
La relation reste donc valable pour $n = 1$.

(c) $\{A_n^1, A_n^2, A_n^3, A_n^4\}$ étant un système complet d'événements, on a :

$$P(A_n^1) + P(A_n^2) + P(A_n^3) + P(A_n^4) = 1.$$

On en déduit que :

$$P(A_n^2) + P(A_n^3) + P(A_n^4) = 1 - P(A_n^1).$$

Ainsi en utilisant le résultat de la question 4.(a), on a :

$$P(A_{n+1}^1) = \frac{1}{3}(1 - P(A_n^1)).$$

On a donc bien $\boxed{P(A_{n+1}^1) = -\frac{1}{3}P(A_n^1) + \frac{1}{3}}$.

(d) Posons $u_n = P(A_n^1)$, la relation de la question précédente devient pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}.$$

La suite $(u_n)_n$ est alors une suite arithmético-gémétrique. Deux méthodes possibles pour déterminer son expression.
Première méthode : appliquer la méthode de cours pour trouver l'expression du terme général des suites arithmético-géométrique.
Deuxième méthode : utiliser le fait que la réponse est donnée dans l'énoncé et montrer le résultat par récurrence. C'est ce qu'on choisira de faire ici. On pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. »

Initialisation $(n = 0)$ D'après la question 1., $u_0 = P(A_0^1) = 1$. De plus, $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times 1 = 1$. Ainsi :

$$u_0 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^0.$$

La propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
D'après la questions 4.(d), on a :

$$u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}.$$

Or par hypothèse de récurrence, $u_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, d'où :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{12} - \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{4-1}{12} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

On a donc bien montré que pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(A_n^1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$.

5. (a) Comme déjà vu à la question 4. pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\{A_n^1, A_n^2, A_n^3, A_n^4\}$ forme un système complet d'événements. Soit $n \geqslant 2$, nous allons utiliser la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements de probabilités non nulles : $\{A_n^1, A_n^2, A_n^3, A_n^4\}$. On a donc pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} P(A_{n+2}^1) &= P(A_n^1 \cap A_{n+1}^2) + P(A_n^2 \cap A_{n+1}^2) + P(A_n^3 \cap A_{n+1}^2) + P(A_n^4 \cap A_{n+1}^2) \\ &= P(A_n^1)P_{A_n^1}(A_{n+1}^2) + P(A_n^2)P_{A_n^2}(A_{n+1}^2) + P(A_n^3)P_{A_n^3}(A_{n+1}^2) + P(A_n^4)P_{A_n^4}(A_{n+1}^2) \end{aligned}$$

D'après l'énoncé : $P_{A_n^2}(A_{n+1}^2) = 0$ et les autres probabilités valent $\frac{1}{3}$. Ainsi on a bien pour $n \geqslant 2$,

$\boxed{P(A_{n+1}^2) = \frac{1}{3}(P(A_n^1) + P(A_n^3) + P(A_n^4)).}$

Il reste à vérifier que cette relation reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Pour $n = 0$, $P(A_1^2) = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}(P(A_0^1) + P(A_0^3) + P(A_0^4) = \frac{1}{3}(1 + 0 + 0) = \frac{1}{3}$. La relation reste donc vraie pour $n = 0$.

Pour $n = 1$, $P(A_2^2) = \frac{2}{9}$ et $\frac{1}{3}(P(A_1^1) + P(A_1^3) + P(A_1^4) = \frac{1}{3}(0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$. La relation reste donc vraie pour $n = 1$.

(b) $\{A_n^1, A_n^2, A_n^3, A_n^4\}$ étant un système complet d'événements, on a :

$$P(A_n^1) + P(A_n^2) + P(A_n^3) + P(A_n^4) = 1,$$

et donc $P(A_n^1) + P(A_n^3) + P(A_n^4) = 1 - P(A_n^2)$, on a donc :

$$P(A_{n+1}^2) = \frac{1}{3}(1 - P(A_n^2)).$$

En conclusion, $\boxed{P(A_{n+1}^2) = -\frac{1}{3}P(A_n^2) + \frac{1}{3}}$.

(c) Montrons le résultat par récurrence. On pose $\mathcal{P}(n)$: « $P(A_n^2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. »

Initialisation $(n = 0)$ D'après la question 1., $P(A_0^2) = 0$. De plus, $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 0$. Ainsi :

$$P(A_0^2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^0.$$

La propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'après la questions 4.(d), on a :

$$P(A_{n+1}^2 = -\frac{1}{3}P(A_n^2) + \frac{1}{3}.$$

Or par hypothèse de récurrence, $P(A_n^2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, d'où :

$$\begin{aligned}
P(A_{n+1}^2 &= -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + \frac{1}{3} \\
&= -\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{4-1}{12} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(A_n^2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$.

6. Les suites $(P(A_n^3))_n$ et $(P(A_n^4))_n$ vérifient la même relation de récurrence que la suite $(P(A_n^2))_n$. De plus, elles ont même premier terme à savoir $P(A_0^2) = P(A_0^3) = P(A_0^4) = 0$, leur terme général a donc la même expression. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(A_n^3) = P(A_n^4) = P(A_n^2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$.

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

1. (a) D'après la partie 1, on a :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= \begin{pmatrix} P(A^1_{n+1}) & P(A^2_{n+1}) & P(A^3_{n+1}) & P(A^4_{n+1}) \end{pmatrix} \\
&= \Big(\frac{1}{3}(P(A^2_n)+P(A^3_n)+P(A^4_n)) \quad \frac{1}{3}(P(A^1_n)+P(A^3_n)+P(A^4_n)) \quad \frac{1}{3}(P(A^1_n)+P(A^2_n)+P(A^4_n)) \quad \frac{1}{3}(P(A^1_n)+P(A^2_n)+P(A^3_n \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (P(A^2_n)+P(A^3_n)+P(A^4_n) & P(A^1_n)+P(A^3_n)+P(A^4_n) & P(A^1_n)+P(A^2_n)+P(A^4_n) & P(A^1_n)+P(A^2_n)+P(A^3_n) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} P(A^1_{n+1}) & P(A^2_{n+1}) & P(A^3_{n+1}) & P(A^4_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= U_n A.
\end{aligned}$$

(b) On pose $\mathcal{P}(n)$: « $A_n = U_0 A^n$ ».

Initialisation $(n = 0)$. Par convention, $U_0 A^0 = U_0 I_4 = U_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= U_n A && \text{d'après la question précédente ;} \\
&= U_0 A^n A && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= U_0 A^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{U_n = U_0 A^n}$.

(c) On a d'après la question 1. de la partie 1, $U_0 = \begin{pmatrix} P(A^1_0) & P(A^2_0) & P(A^3_0) & P(A^4_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On remarque qu'étant donné la valeur de U_0, $U_0 A^n$ est égal à la première ligne de A^n. Or $U_0 A^n = U_n$ donc la première ligne de A^n est égale à U_n. Soit :

$$U_n = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \right).$$

2. Pour obtenir la deuxième ligne de A^n, il aurait fallu avoir $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que le mobile se trouve initialement sur le sommet 2. On aurait obtenu :

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \right).$$

Pour obtenir la troisième ligne de A^n, il aurait fallu avoir $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que le mobile se trouve initialement sur le sommet 3. On aurait obtenu :

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \right).$$

Pour obtenir la deuxième ligne de A^n, il aurait fallu avoir $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que le mobile se trouve initialement sur le sommet 4. On aurait obtenu :

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \right).$$

