Devoir maison n° 5

Ce devoir maison est composé d'un problème.

Problème 1

Partie 1 : étude d'un phénomène aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![1;4]\!]$, on note A_n^j : « Le mobile est sur le sommet j à l'instant n. »

1. Donner les valeurs de : $P(A_0^1)$, $P(A_0^2)$, $P(A_0^3)$ et $P(A_0^4)$.
2. Donner également les valeurs de $P(A_1^1)$, $P(A_1^2)$, $P(A_1^3)$ et $P(A_1^4)$.
   On admet pour la suite que : $P(A_2^1) = \dfrac{1}{3}$, $P(A_2^2) = P(A_2^3) = P(A_2^4) = \dfrac{2}{9}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, les probabilités $P(A_n^1)$, $P(A_n^2)$, $P(A_n^3)$ et $P(A_n^4)$ sont différentes de 0.
4. (a) Etablir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$P(A_{n+1}^1) = \frac{1}{3}\left(P(A_n^2) + P(A_n^3) + P(A_n^4)\right).$$
   (b) Vérifier à l'aide des données des questions 1. et 2. que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(A_n^1) + P(A_n^2) + P(A_n^3) + P(A_n^4) = 1$ et en déduire l'égalité :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(A_{n+1}^1) = -\frac{1}{3}P(A_n^1) + \frac{1}{3}.$$
   (d) Etablir alors que : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(A_n^1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n.$
   On pourra introduire la notation : $u_n = P(A_n^1)$ pour faciliter le raisonnement.
5. (a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(A_{n+1}^2) = \frac{1}{3}\left(P(A_n^1) + P(A_n^3) + P(A_n^4)\right).$$
   (b) En déduire une relation entre $P(A_{n+1}^2)$ et $P(A_n^2)$.
   (c) Montrer enfin que : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(A_n^2) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n.$
6. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$P(A_{n+1}^3) = -\frac{1}{3}P(A_n^3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(A_{n+1}^4) = -\frac{1}{3}P(A_n^4) + \frac{1}{3}.$$
   En déduire sans calcul que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(A_n^3) = P(A_n^4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} P(A_n^1) & P(A_n^2) & P(A_n^3) & P(A_n^4) \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer (grâce aux résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = U_n A.$$

   (b) Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = U_0 A^n$.

   (c) En déduire la première ligne de A^n.

2. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.