Corrigé du DM n° 4

Problème 1

1. (a) On a $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$,
$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a).$$
   (b) Pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$\cos(2t)=\cos(t+t)=\cos(t)\cos(t)-\sin(t)\sin(t)=\cos^2(t)-\sin^2(t).$$
   Puis, comme $\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$, il vient :
$$\cos(2t)=\cos^2(t)-\big(1-\cos^2(t)\big)=2\cos^2(t)-1.$$
   Enfin,
$$\sin(2t)=\sin(t+t)=\cos(t)\sin(t)+\sin(t)\cos(t)=2\cos(t)\sin(t).$$
   (c) La fonction sin est dérivable en 0 donc :
$$\frac{\sin(t)-\sin(0)}{t-0}=\frac{\sin(t)}{t}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\sin'(0)=\cos(0)=1.$$
2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$, on a, en utilisant la formule pour $\sin(2t)$ démontrée à la question 1.(b) :
$$v_{n+1}=u_{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=u_n\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2}u_n\sin\left(2\frac{x}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2}v_n$$
   La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est donc $\boxed{\text{géométrique de raison } \frac{1}{2}.}$

   (b) La suite $(v_n)_n$ étant géométrique, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$v_n=v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=u_0\sin(x)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\cos(x)\sin(x)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
   En utilisant de nouveau la question 1.(b), on obtient :
$$v_n=\frac{1}{2}\sin(2x)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
   Donc, comme pour tout $n\in\mathbb{N},\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\neq 0$, on a :
$$u_n=\frac{v_n}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}=\frac{\frac{\sin(2x)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}=\frac{\sin(2x)}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$
   Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{u_n=\frac{\sin(2x)}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}}$.

   (c) Comme $\left|\frac{1}{2}\right|<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}x\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

   De plus $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u}=1$ d'après la question 1 .(c), donc $\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\sin(u)}=1$ donc par composition
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}=1.$$
   Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{\sin(2x)}{2x}\frac{x\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$,on en déduit que $\boxed{u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\sin(2x)}{2x}}$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $a_n > 0$ et $b_n > 0$ ».

Initialisation Pour $n = 0$, on a $a_0 = 1 > 0$ et $b_0 = \dfrac{1}{\cos(x)} > 0$ car $x \in]\,0, \dfrac{\pi}{2}[$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie au rang n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par définition, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} > 0$ car, par hypothèse de récurrence, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

Par suite, $a_{n+1}b_n > 0$ et donc b_{n+1} est bien défini et on a $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} > 0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n > 0$ et $b_n > 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1}-a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}-a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}}\right) = \sqrt{a_{n+1}}\left(\frac{b_n - a_{n+1}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}}\right) = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}}\left(b_n - \frac{a_n + b_n}{2}\right)$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)}\left(b_n - a_n\right)}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $a_n < b_n$ ».

Initialisation Pour $n = 0$, on a $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ donc $\cos(x) < 1$ et $b_0 = \dfrac{1}{\cos(x)} > 1 = a_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et on veut montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

D'après la question précédente,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)}\left(b_n - a_n\right).$$

Or $\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)} > 0$ d'après la question 3.(b) et $b_n - a_n > 0$ par hypothèse de récurrence, donc

$$b_{n+1} - a_{n+1} > 0 \text{ i.e. } b_{n+1} > a_{n+1}.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}, b_n > a_n$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$$

Or $\sqrt{b_n} \geqslant 0$ donc $\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \leqslant 1$ donc $\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)} < \dfrac{1}{2}$.

Comme $b_n - a_n > 0$, d'après la question 3.(c)., on a en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(b_n - a_n\right)}$.

(e) **Récurrence à rédiger**

(f) Commençons par étudier la monotonie des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} > 0$$

d'après la question 3.(c) donc la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est $\boxed{\text{croissante}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= \sqrt{a_{n+1}b_n} - b_n = \sqrt{b_n}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_n}\right) \\
&= \sqrt{b_n}\frac{a_{n+1} - b_n}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_n}} \quad \text{en multipliant par la quantité conjuguée} \\
&= \frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_n}}\left(a_{n+1} - b_n\right) \\
&= \frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_n}}\left(\frac{a_n + b_n}{2} - b_n\right) \\
&= \frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{b_n}}\frac{a_n - b_n}{2}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{b_n}} > 0$ et $a_n - b_n < 0$ d'après la question 3.(c) donc la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est $\boxed{\text{décroissante}}$.
Enfin d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (b_0 - a_0)\,,$$

donc comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, on a, d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0}$.

Ainsi, les suites (a_n) et (b_n) sont $\boxed{\text{adjacentes}}$.

D'après le théorème des suites adjacentes, elles $\boxed{\text{convergent donc vers une limite commune } \ell}$.

(g) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}(n) : \quad a_n = \frac{u_n}{(\cos(x))^2}\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{u_n}{(\cos(x))^2}.$$

Initialisation Pour $n = 0$, on a

$$\frac{u_0}{(\cos(x))^2}\cos\left(\frac{x}{2^0}\right) = \frac{(\cos(x))(\cos(x))}{(\cos(x))^2} = 1 = a_0$$

et

$$\frac{u_0}{(\cos(x))^2} = \frac{\cos(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{\cos(x)} = b_0$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. On a :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n}{(\cos(x))^2}\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{u_n}{(\cos(x))^2}\right) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= \frac{1}{2(\cos(x))^2}\left(u_n\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)+1\right)\right)\\
&= \frac{u_n}{2(\cos(x))^2}2\left(\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right)^2 \quad \text{d'après la question 1.(b) avec } t = \frac{x}{2^{n+1}}\\
&= \frac{u_n\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{(\cos(x))^2}\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\\
&= \frac{u_{n+1}}{(\cos(x))^2}\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} &= \sqrt{\frac{u_{n+1}}{(\cos(x))^2}\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\frac{u_n}{(\cos(x))^2}}\\
&= \sqrt{\frac{u_{n+1}u_n\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{(\cos(x))^4}}\\
&= \sqrt{\frac{(u_{n+1})^2}{(\cos(x))^4}}\\
&= \frac{u_{n+1}}{(\cos(x))^2} \quad \text{car} \quad \frac{u_{n+1}}{(\cos(x))^2} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(h) Par définition, $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \frac{u_n}{(\cos(x))^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin(2x)}{2x(\cos(x))^2} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2x(\cos(x))^2} = \frac{\sin(x)}{x\cos(x)} = \frac{\tan(x)}{x}$$

Ainsi, par unicité de la limite, $\boxed{\ell = \dfrac{\tan(x)}{x}}$.

(i) La suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et converge vers ℓ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$b_n \geqslant \ell \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant b_n - \ell.$$

D'autre part la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et converge vers ℓ, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n \leqslant \ell \text{ donc } -a_n \geqslant -\ell \quad \text{et} \quad b_n - \ell \leqslant b_n - a_n$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $\boxed{0 \leqslant b_n - \ell \leqslant b_n - a_n}$.

(j) **Bonus** Soit $p\in\mathbb{N}$. D'après la question précédente et la question 3.(e), comme $n^p \geqslant 0$:

$$0 \leqslant n^p\,(b_n-\ell) \leqslant n^p\,(b_n-a_n) \leqslant n^p\left(\frac{1}{2}\right)^n (b_0-a_0)$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^p\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^p}{2^n} = 0$ par croissance comparée.

Ainsi d'après le théorème d'encadrement, $\forall p\in\mathbb{N}$, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^p\,(b_n-\ell)=0}$.

La suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ converge donc vers sa limite plus vite que n^p ne tend vers $+\infty$, et ce quel que soit $p\in\mathbb{N}$, donc la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ $\boxed{\text{converge rapidement vers sa limite}}$.