

Devoir maison n° 4

Ce devoir comprend deux exercices et un problème.

Exercice 1 *Factorisation de polynômes*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère le polynôme $P(x) = 6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1$.

1. Déterminer une racine évidente de P .
2. Factoriser au maximum le polynôme P
3. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(I) \quad 6e^{3x} + 7e^{2x} - 3e^x - 3 + e^{-x} \leq 0.$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$.
2. On considère les trois fonctions suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \sin(x) \end{cases}, \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^2}{2} - 1 + \cos(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x + \frac{x^3}{6} + \sin(x) \end{cases}$$

- (a) En étudiant les variations de chacune de ces fonctions, montrer qu'elles prennent uniquement des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

- (b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^n k^3 \leq n^4$.

- (c) Dédire des questions précédentes que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n - \frac{1}{6n^2} \leq v_n \leq u_n$$

- (d) Conclure que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Problème 1

Partie A : Soient deux réels $a > 0$ et $b > 0$. On définit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ par $u_0 = a, v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.
(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq v_n$.
3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante, et que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
(b) En déduire que $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ convergent et qu'elles ont la même limite. On notera $M(a, b)$ leur limite commune.
4. (a) Justifier que $u_1 \leq M(a, b) \leq v_1$.
(b) En déduire que

$$0 \leq M(a, b) - \sqrt{ab} \leq \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$$

- (c) Déterminer alors la valeur de $M(a, b)$ dans le cas où $a = b$.

Partie B : Soient trois réels $a > 0, b > 0$ et $\lambda > 0$.

1. Dans cette question, on considère les quatre suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}, (u'_n)_{n \geq 0}$ et $(v'_n)_{n \geq 0}$ définies

$$u_0 = a, v_0 = b, u'_0 = b, v'_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} & \text{et} & v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ u'_{n+1} = \sqrt{u'_n v'_n} & \text{et} & v'_{n+1} = \frac{u'_n + v'_n}{2} \end{cases}$$

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u'_n = u_n$ et $v'_n = v_n$.
(b) En déduire que $M(b, a) = M(a, b)$.
2. Dans cette question, on considère les quatre suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}, (u'_n)_{n \geq 0}$ et $(v'_n)_{n \geq 0}$ définies

$$u_0 = a, v_0 = b, u'_0 = \lambda a, v'_0 = \lambda b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} & \text{et} & v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ u'_{n+1} = \sqrt{u'_n v'_n} & \text{et} & v'_{n+1} = \frac{u'_n + v'_n}{2} \end{cases}$$

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u'_n = \lambda u_n$ et $v'_n = \lambda v_n$.
(b) En déduire l'expression de $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a, b)$.
3. A l'aide des deux questions précédentes, déterminer l'expression de $M\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ en fonction de $M(a, b)$.